This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
9000000714
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

math. 1470.

Ma 1470

VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER GERADEN LINIE,

DES PUNKTES UND DES KREISES IN DER EBENE.

16

X

A. 10027

Digitized by Google

Digitized by Google

VORLESUNGEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER GERADEN LINIE,

DES PUNKTES UND DES KREISES IN DER EBENE.

VON

Dr. OTTO HESSE,

ORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU HEIDELBERG.

MIT 13 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1865.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE GAND.

Digitized by Google

Verfasser und Verleger dieses Werkes behalten sich das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen vor und werden ebensowohl den Nachdruck als die unbefugte Uebersetzung mit allen gesetzlichen Mitteln verfolgen.

Digitized by Google

VORREDE.

Das vorliegende Lehrbuch dient dem Studium der Geometrie sowohl auf der Schule als auf der Universität.

Die behandelten Gegenstände, sowie die nothwendigen Voraussetzungen, sind der Sphäre des Schulunterrichts entnommen. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die siebente Vorlesung. Sie durfte indess nicht wegbleiben, weil sie ein sprechendes Zeugniss ablegt für den innigen Zusammenhang der Geometrie mit der Algebra.

Die Vorlesungen sind wesentlich akademische. Darum beschränken sie sich nicht auf die der Schule gezogenen, Grenzen, sondern geben in erweitertem Rahmen ein Bild der Wissenschaft in ihrer jetzigen Form.

Ihre Aufgabe ist gefällig anzuregen und zu weiteren Entdeckungen zu ermuntern. Dabei können sie aber doch dem Zuhörer oder Leser die Mühe der Arbeit und des Nachdenkens nicht ersparen, ohne welche man weder in der Wissenschaft noch in dem Leben Gewinn und Befriedigung hat.

Heidelberg, im November 1865.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Seite

Das Wesen der analytischen Geometrie 1
Das Coordinatensystem 3
Ausdruck der Entfernung zweier Punkte von einander 6
Der Flächeninhalt eines Dreiecks 7
Ausdruck des Winkels, den zwei gerade Linien bilden 10

Zweite Vorlesung.

Die gerade Linie.

Die Gleichung der geraden Linie in der allgemeinen und in der Normalform 13
Der senkrechte Abstand eines Punktes von einer geraden Linie 16
Die geraden Linien, welche die Winkel halbiren, die zwei gerade Linien bilden 18
Sätze über Dreiecke 21

Dritte Vorlesung.

Harmonische Linien. Linien der Involution.

Das anharmonische und das harmonische Verhältniss von zwei Linienpaaren 27
Die Involution von drei Linienpaaren 31
Allgemeinere Sätze über Dreiecke 36
Construction von harmonischen Linienpaaren und Linienpaaren der Involution 40

Vierte Vorlesung.

Der Punkt.

Definition der Liniencoordinaten und der Gleichung eines Punktes 43
Die Gleichung des Punktes in der allgemeinen und in der Normalform 47
Der Punkt, welcher eine begrenzte gerade Linie halbirt oder auf ihrer Verlängerung im Unendlichen liegt 48

Digitized by Google

Fünfte Vorlesung.

Harmonische Punkte. Punkte der Involution.

Seite

Das anharmonische und das harmonische Verhältniss von zwei Punktepaaren auf einer geraden Linie 52
Die Involution von drei Punktepaaren 55
Allgemeinere Sätze über Dreiecke 59
Construction von harmonischen Punktepaaren und Punktepaaren der Involution 62

Sechste Vorlesung.

Zur Involution.

Die Gleichungen von Punktepaaren und Linienpaaren 65
Die Bedingungsgleichung der Involution in sieben verschiedenen Formen 68
Sätze über Punktepaare auf einer geraden Linie 73

Siebente Vorlesung.

Die Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Unter Voraussetzung des Satzes, dass die ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung sich rational durch die Coefficienten in der Gleichung darstellen lassen, giebt diese Vorlesung eine geometrische Anschauung von der Auflösung biquadratischer Gleichungen 78

Achte Vorlesung.

Linienpaare und Punktepaare.

Die entwickelte Gleichung eines Linienpaares und eines Punktepaares 88
Nothwendige Bedingung dazu 89
Ausdruck für den Winkel, den ein Linienpaar einschliesst . . . 90
Ausdrücke für harmonische Linienpaare und Linienpaare der Involution 91
Länge der von einem Punktepaare begrenzten geraden Linie . . 95
Ausdrücke für harmonische Punktepaare nnd Punktepaare der Involution 96

Neunte Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Dreieckcoordinaten.

Homogene Coordinaten 98
Dreieckcoordinaten 103
Linienpaare, welche von drei Punkten in einer geraden Linie ausgehen 107
Punktepaare auf drei von einem und demselben Punkte ausgehenden geraden Linien 110

Digitized by Google

Zehnte Vorlesung.

Das Pascalsche und das Brianchonsche Sechseck.

Seite

Die 60 Pascalschen Sechsecke mit denselben 6 Ecken und die 60 Brianchonschen Sechseeke, welche dieselben 6 geraden Linien als Seiten haben 113

Elfte Vorlesung.

Der Kreis.

Normalform und allgemeine Form der Gleichung des Kreises . . 136
Die Schnittpunkte einer geraden Linie und eines Kreises . . . 138
Harmonische Pole eines Kreises. Pol und Polare. Die Gleichung der letzteren 139
Construction der Polare 140
Die Gleichung des Tangentenpaares von einem Punkte an den Kreis 142
Die Kreisgleichung in Liniencoordinaten 143
Harmonische Polaren des Kreises 145
Die Gleichung des Poles 146
Die Gleichung des Punktepaares, in welchem eine gerade Linie einen Kreis schneidet 147

Zwölfte Vorlesung.

Das System von Kreisen, welche durch die Schnittpunkte zweier Kreise gehen.

Die Gleichung des Systemes von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden 148
Die gemeinschaftliche Secante des Systems von Kreisen 149
Grenzpunkte des Systems der Kreise 151
Ein zweites System von Kreisen schneidet das gegebene System senkrecht 152
Elegante Form der Gleichung der Polare eines Kreises 155
Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise 158
Die Gleichung des Tangentenpaares an zwei Kreisen 160
Analytischer Ausdruck für das System von Kreisen, welche das gegebene senkrecht schneiden 166

Dreizehnte Vorlesung.

Das System von Kreisen, welche von einem Kreise senkrecht geschnitten werden. Das Problem der Berührung eines Kreises an drei gegebenen Kreisen.

Das System von Kreisen, deren Gleichungen aus den Gleichungen von drei gegebenen Kreisen linear zusammengesetzt sind . . 168
Das Centrum der gemeinschaftlichen Secanten von drei Kreisen 169
Ein Kreis schneidet das System senkrecht 171
Die vier Aehnlichkeitsaxen von drei Kreisen 174
Das Problem der Berührung eines Kreises an drei gegebenen Kreisen 178

Digitized by Google

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Die Geometrie lehrt Sätze entdecken und beweisen, welche Eigenschaften der Figuren ausdrücken. Sie erreicht ihre Zwecke vorzugsweise durch zwei Methoden, durch die synthetische und durch die analytische Methode.

Die synthetische Geometrie sucht ihre Wahrheiten durch blosse Anschauung, durch Operationen an und mit der Figur zu erreichen. Die Figur, die mit ihren Eigenschaften ihr Zweck ist, dient ihr zugleich als Mittel zum Zwecke. Die von Euklid mit ihren Beweisen vorgetragenen geometrischen Sätze können als Bestätigung des Gesagten dienen.

Die analytische Geometrie, wie sie von Cartesius erfunden und nach ihm weiter ausgebildet worden ist, unterscheidet drei von einander gesonderte Operationen, welche die Methode zugleich charakterisiren. Die erste besteht in der Uebertragung einer gegebenen Figur in äquivalente Gleichungen nach ganz bestimmten Regeln, der Art, dass man auch umgekehrt von jenen Gleichungen ausgehend durch geometrische Deutung derselben wieder zu der gegebenen Figur zurückkehren kann. Die Combination und die Transformation dieser Gleichungen ist die zweite Operation der analytischen Geometrie. Sie ist ausschliesslich eine Sache des Calculs. Die combinirten und transformirten Gleichungen sind aber wieder die äquivalenten analytischen Ausdrücke für eine gewisse Nebenfigur, die zugleich mit der gegebenen Figur besteht. Deutet man daher die combinirten und transformirten Gleichungen geometrisch nach den bereits erwähnten

Digitized by Google

Regeln, — und dieses ist die letzte Operation der analytischen Geometrie — so erhält man jene Nebenfigur, von der man weiss, dass sie zugleich mit der gegebenen Figur besteht. Da aber das Bestehen einer Nebenfigur im Zusammenhange mit einer gegebenen Figur sich immer als ein geometrischer Satz auffassen lässt, so lehrt hiernach die analytische Geometrie geometrische Sätze finden und beweisen. Ein Beispiel soll dieses klarer machen.

Es sei ein Dreieck gegeben zugleich mit den Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks. Die drei Seiten des Dreiecks und die drei Halbirungslinien sollen die gegebene Figur bilden. Die drei letzteren bilden ein zweites Dreieck, dessen Ecken wir als die Nebenfigur betrachten. Wir drücken nun, indem wir mit der ersten Operation beginnen, die gegebene Figur durch Gleichungen aus. Wir operiren ferner mit diesen durch die Figur bestimmten Gleichungen so, dass wir schliesslich diejenigen Gleichungen erhalten, welche die Nebenfigur analytisch ausdrücken. Wir finden, dass jede der drei Ecken der Nebenfigur durch ganz dieselben Gleichungen ausgedrückt wird. Daraus müssen wir schliessen, dass die drei Ecken der Nebenfigur ein und derselbe Punkt sind. Auf diese Weise gelangen wir zu dem Satze:

„Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte."

Nehmen wir an, der geometrische Satz sei bekannt. Es handle sich darum, den Satz zu beweisen. Alsdann sind durch die Bedingungen des Satzes die Figur gegeben und zugleich die Gleichungen bestimmt, welche sie analytisch ausdrücken. Durch den Schluss des Satzes ist die Nebenfigur bestimmt und auch die Gleichungen, welche sie analytisch ausdrücken. Der Beweis des Satzes beruht dann nur noch auf den Combinationen und Transformationen der Gleichungen der gegebenen Figur in der Weise, dass daraus die Gleichungen der Nebenfigur entstehen. Der Beweis ist nichts weiter als eine Sache der Rechnung.

So führt im Allgemeinen die analytische Geometrie die Schwierigkeit des Beweises irgend eines geometrischen Satzes zurück auf die Schwierigkeit der Rechnung; durch Rechnung lässt sich der Beweis immer erzwingen.

Man würde aber irren, wenn man den Schwerpunkt der analytischen Geometrie in der Rechnung suchen wollte. Das

Digitized by Google

Resultat der Rechnung ist das Endziel, die Rechnung selbst bleibt eine unliebsame Beigabe, die wir zur freieren Bewegung auf ein Minimum zu beschränken haben. Dieses Minimum durch möglichste Vermeidung von Rechnungen annähernd zu erreichen, wird eine der Aufgaben sein, welche zu lösen diese Vorlesungen sich durchgehend zur Pflicht machen.

Die Gegenstände der analytischen Geometrie sind Raumfiguren und im Speciellen Figuren in einer und derselben Ebene. Indem wir die Betrachtung der Raumfiguren gänzlich ausschliessen, werden wir uns in diesen Vorlesungen beschränken auf die Betrachtung von Figuren in einer und derselben Ebene.

Wir werden mit den analytischen Ausdrücken der einfachsten Figur, dem Punkte, in der Ebene beginnen und allmählig auf zusammengesetztere Figuren übergehen.

Die analytische Geometrie braucht, um Figuren in Gleichungen zu übertragen und umgekehrt Gleichungen in Figuren umzusetzen, einen einfachen Apparat, das Coordinatensystem, mit dessen Construction wir den Anfang zu machen haben.

Wir ziehen in der Ebene zwei unbegrenzte gerade Linien, welche auf einander senkrecht stehen. Sie werden als feste gerade Linien genommen und führen den Namen der Coordinatenaxen. Um sie von einander zu unterscheiden, nennt man die eine die x Axe, die andere die y Axe, oder auch die erstere die Abscissenaxe, die zweite die Ordinatenaxe. Sie schneiden sich in einem Punkte O, dem Coordinatenanfangspunkt. Auf jeder dieser beiden Coordinatenaxen unterscheidet man, von dem Coordinatenanfangspunkte ausgehend, zwei einander entgegengesetzte Richtungen. Die eine, gleich viel, welche, nennt man die positive, die andere die negative Richtung der Coordinatenaxe. Wir werden die Richtungen OX und OY für die positiven Richtungen respective der x Axe und der y Axe nehmen.

Durch die Lage eines Punktes p sind nun unzweideutig seine Abstände vp und up von den Coordinatenaxen bestimmt. Sie führen den Namen der Coordinaten des Punktes und werden respective mit den Buchstaben x und y bezeichnet, wenn der Punkt als ein beliebiger gelten soll.

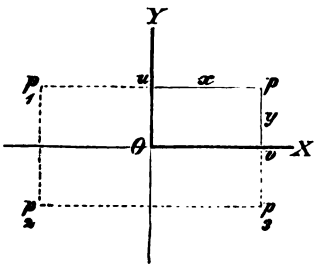
Digitized by Google

Wenn ein bestimmter Punkt die Coordinaten a und b hat, so drücken wir dieses analytisch durch die Gleichungen aus:

$$x = a, \quad y = b$$

und nennen sie die Gleichungen des Punktes. Derselbe Punkt wird auf diese Weise immer durch dieselben Gleichungen analytisch ausgedrückt.

Fig. 1.



Gehen wir umgekehrt von jenen Gleichungen des Punktes aus und suchen ihr geometrisches Bild, den Punkt, so kommen wir auf vier verschiedene Punkte p, p_1, p_2, p_3 zurück, von welchen jeder durch die beiden Gleichungen analytisch dargestellt wird. Will man aber, dass jene Gleichungen nur einen einzigen Punkt p analytisch darstellen, so genügt es, der Richtung seiner Coordinaten Rechnung zu tragen. Wir werden deshalb die Abstände eines Punktes von den Coordinatenaxen, die Coordinaten des Punktes, als positive Grössen betrachten, wenn sie genommen sind in der positiven Richtung der Coordinatenaxen, im anderen Falle als negative Grössen.

Nach dieser Bestimmung gruppiren sich, in der Voraussetzung, dass a und b positive Grössen seien, die Coordinaten der genannten vier Punkte p nach folgender Tafel:

	x	y
p	a	b
p_1	$-a$	b
p_2	$-a$	$-b$
p_3	a	$-b$

und jeder der vier Punkte p wird durch ein anderes Gleichungspaar analytisch dargestellt.

Wenn wir demnach unter a und b irgend zwei reelle Grössen verstehen, so hat jeder Punkt in der Ebene seinen analytischen Ausdruck in zwei Gleichungen von der angegebenen Form, und jede zwei Gleichungen von jener Form repräsentiren einen ganz bestimmten Punkt in der Ebene. Wir können des-

Digitized by Google

halb sagen, der Punkt sei das geometrische Aequivalent — oder Bild — seiner Gleichungen und die Gleichungen seien das analytische Aequivalent — der analytische Ausdruck — des Punktes.

Um weitere Fragen anzuregen, drücken wir dasselbe nur anders aus, indem wir sagen: Wenn die Coordinaten eines Punktes — für x und y gesetzt — jenen beiden Gleichungen zugleich genügen, so hat der Punkt die Eigenschaft, ein ganz bestimmter zu sein. Hieran schliesst sich naturgemäss die Frage, welche Eigenschaften die Punkte haben, deren Coordinaten nur einer von jenen Gleichungen genügen, z. B. der ersten:

$$x = a.$$

Die Antwort versteht sich von selbst. Sie liegen alle auf der, der y Axe parallelen, Linie, welche von dieser Axe um a absteht. Aber auch jeder Punkt jener Linie hat die Eigenschaft, dass seine Coordinaten der genannten Gleichung genügen.

Wir nehmen deshalb die genannte Gleichung für den analytischen Ausdruck — für die Gleichung — jener der y Axe parallelen Linie, und die gerade Linie selbst für das geometrische Bild jener Gleichung.

Die analoge Betrachtung der Gleichung:

$$y = b$$

giebt das geometrische Aequivalent für die der x Axe parallele Linie, welche von ihr um die Entfernung b absteht.

Wir sind hiernach in der Lage, jeden Punkt in der Ebene, und jede gerade Linie, welche einer der Coordinatenaxen parallel ist, analytisch auszudrücken und umgekehrt jede zwei Gleichungen in der besprochenen Form oder auch jede einzelne geometrisch zu deuten.

Jede von diesen Gleichungen für sich stellt eine gerade Linie dar; beide in Verbindung mit einander stellen den Schnittpunkt der beiden geraden Linien dar.

Die Coordinaten $x\,y$ eines Punktes sind aber auch unzweideutig bestimmt durch die linearen Gleichungen:

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Die oben angeregte Frage führt demnach in weiterer Ausdehnung darauf hin, zu ermitteln, welches die geometrische Bedeutung sei einer dieser Gleichungen, das heisst, welches die

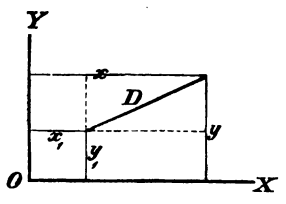
Digitized by Google

Eigenschaften seien derjenigen Punkte, deren Coordinaten einer dieser Gleichungen genügen. Die Beantwortung dieser Frage werden wir in der nächsten Vorlesung geben. Wir werden dort zeigen, wie jede dieser Gleichungen für sich eine gerade Linie geometrisch repräsentirt, was sich im Speciellen schon so einsehen lässt, wenn man a und a_1 oder b und b_1 gleich 0 setzt. Denn in diesen Fällen haben wir die vorausgegangenen Gleichungen, deren geometrisches Aequivalent wir bereits festgestellt haben.

Wenn der Punkt als die einfachste geometrische Figur gilt, so muss man zwei Punkte für die nächste complicirtere Figur nehmen. Durch zwei Punkte ist aber ebensowohl die Lage der geraden Linie bestimmt, welche durch sie geht, als das von den beiden Punkten begrenzte Stück auf ihr. Diese gerade Linie gehört im Allgemeinen nicht zu den Linien, welche wir bereits betrachtet haben; wir werden in der folgenden Vorlesung auf sie zurückkommen. Wenn wir aber das von den beiden Punkten begrenzte Stück der geraden Linie in das Auge fassen, so können wir uns die Aufgabe stellen:

Wenn die Coordinaten x, y und x_1, y_1 zweier Punkte gegeben sind, die Entfernung D derselben durch die gegebenen Coordinaten auszudrücken.

Fig. 2.



Man sieht in der zugehörigen Figur das Rechteck, dessen Diagonale D von den beiden durch ihre Coordinaten gegebenen Punkten begrenzt wird. Die Seiten dieses Rechteckes sind ihrer Grösse nach $x - x_1$ und $y - y_1$. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze hat man daher:

$$(1) \ldots\ldots \quad D^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

An diese Gleichung, welche die vorgelegte Aufgabe löset, knüpfen wir einige Bemerkungen.

Man soll über Gleichungen, durch welche geometrische Aufgaben gelöset werden, nicht flüchtig fortgehen. Denn die Gleichungen sind vielfacher Deutungen fähig und lösen zugleich andere geometrische Aufgaben. Im Allgemeinen ist es zwar eine Kunst, für welche sich keine bestimmten Regeln angeben lassen,

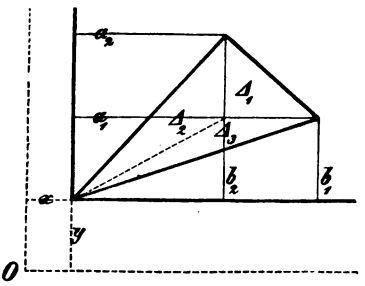
Digitized by Google

jene anderen geometrischen Aufgaben zu entdecken, aber es ist ein in der Analysis wie in der Geometrie bekanntes Mittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten, dass man die Aufgaben umkehrt. Wir wollen dieses Mittel an unserer Aufgabe versuchen.

Während in der Aufgabe die beiden Punkte gegeben waren und ihre Entfernung gesucht wurde, so kehren wir die Aufgabe um, wenn wir den einen Punkt und die Entfernung als gegeben betrachten, dagegen den anderen Punkt suchen. Sind x_1 y_1 die gegebenen Coordinaten des ersten Punktes, x y die Coordinaten des gesuchten Punktes und D die gegebene Entfernung der beiden Punkte von einander, so ist die Gleichung (1) die Bedingung, welche die Coordinaten des gesuchten Punktes zu erfüllen haben. Nun weiss man aber, dass der gesuchte Punkt ein beliebiger Punkt in der Peripherie des Kreises ist, der mit dem Radius D um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt construirt ist. Daraus folgt, dass die Coordinaten x y eines jeden Punktes in der Peripherie des Kreises der Gleichung (1) genügen. Da ferner die Coordinaten keines anderen Punktes der Gleichung genügen, so wird man die Gleichung (1) mit den variabeln Coordinaten x y des Punktes für den analytischen Ausdruck des Kreises, für die Gleichung des Kreises zu nehmen haben, wenn man darunter versteht, dass die Coordinaten eines jeden Punktes in der Peripherie jener Gleichung genügen, und dass alle Punkte, deren Coordinaten jener Gleichung genügen, in der Peripherie des Kreises liegen.

Wenn drei Punkte gegeben sind, so ist damit zugleich das Dreieck bestimmt, dessen Ecken die gegebenen Punkte sind. Indem wir auf den Flächeninhalt dieses Dreiecks unser Augenmerk richten, werden wir vorerst die Aufgabe lösen:

Fig. 3.



Den Flächeninhalt Δ eines Dreiecks zu bestimmen, dessen eine Ecke in dem Coordinatenanfangspunkt liegt, dessen beide anderen Ecken durch ihre Coordinaten $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ gegeben sind.

Digitized by Google

In der Figur ist das gegebene Dreieck durch die Coordinaten $a_1\ b_2$ und durch die punktirte gerade Linie in demselben in drei Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3 zertheilt. Die doppelten Flächeninhalte dieser Theile sind:

$$2\Delta_1 = (a_1 - a_2)\ (b_2 - b_1)$$
$$2\Delta_2 = (b_2 - b_1)\ a_2$$
$$2\Delta_3 = (a_1 - a_2)\ b_1$$

Da aber $2\Delta = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3$, so hat man:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ 2\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass dieser Ausdruck für 2Δ dem Werthe nach zwar ungeändert bleibt, wenn man die beiden Ecken des Dreiecks, welche nicht in dem Coordinatenanfangspunkt liegen, mit einander vertauscht, dass er aber sein Vorzeichen ändert. Hiernach giebt jener Ausdruck von 2Δ zwar immer den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, aber mit dem positiven oder negativen Vorzeichen je nach der Bezeichnung der Ecken.

Mit Hülfe dieses Resultates werden wir sogleich die allgemeine Aufgabe lösen:

Den Flächeninhalt Δ eines Dreiecks zu bestimmen, dessen Ecken durch ihre Coordinaten xy, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ gegeben sind.

Denken wir uns zu diesem Zwecke ein zweites paralleles Coordinatensystem, dessen Coordinatenaxen durch die punktirten in O zusammenlaufenden geraden Linien dargestellt werden. Nehmen wir an, die Coordinaten des Anfangspunktes des ursprünglichen Systemes in dem zweiten Coordinatensysteme seien xy, die Coordinaten der beiden anderen Ecken des vorhin betrachteten Dreiecks seien respective $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, so hat man:

$$a_1 = x_1 - x \quad a_2 = x_2 - x$$
$$b_1 = y_1 - y \quad b_2 = y_2 - y$$

und wenn man diese Werthe in (2) einsetzt, erhält man schliesslich:

$$(3)\ \ 2\Delta = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y - x y_2 + x y_1 - x_1 y$$

einen Ausdruck für den doppelten Inhalt des Dreiecks, der durch Vertauschung irgend zweier Ecken desselben nur sein Vorzeichen

Digitized by Google

wechselt. Es ist daher der absolute Werth des Ausdruckes für den doppelten Inhalt des Dreiecks zu nehmen.

Um Regeln anzugeben, wie die beiden Ausdrücke von 2Δ in (2) und (3) sich leicht unabhängig von dem Vorhergehenden bilden lassen, stellen wir die beiden Gleichungen auf:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Löset man diese beiden Gleichungen auf, so stellen sich die Werthe der Unbekannten x und y in der Form von Brüchen dar mit gleichen Nennern. Der gleiche Nenner ist gerade der Ausdruck von 2Δ in (2).

Hat man diesen Ausdruck gebildet, so erhält man die beiden ersten Glieder von 2Δ in (3), wenn man die Buchstaben a mit x und b mit y vertauscht. Die nächstfolgenden beiden Glieder gehen aus diesen hervor, wenn man für die Indices 0 1 2 respective setzt 1 2 0, und die beiden letzten Glieder aus den beiden vorhergehenden auf dieselbe Weise. Nachträglich hat man nur den Index 0 ganz fortzulassen, überall wo er auftritt.

Kehren wir unsere Aufgabe um, indem wir den Flächeninhalt Δ und die Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ der die Grundlinie begrenzenden Ecken des Dreiecks als gegeben betrachten, die Coordinaten $x\,y$ der Spitze des Dreiecks aber suchen, so sehen wir, dass dieselben der Gleichung (3) genügen müssen. Da aber die Spitzen aller Dreiecke von gegebener Grundlinie und gegebenem Flächeninhalte in einer bestimmten, der Grundlinie des Dreiecks parallelen, Linie liegen, so wird man die Gleichung (3) für die Gleichung der genannten parallelen Linie zu nehmen haben. Denn keine von der parallelen Linie entfernte Spitze genügt den Bedingungen der umgekehrten Aufgabe.

Die Gleichung (3) mit den variabeln Coordinaten $x\,y$ lässt sich, wenn man unter a, b, c constante Grössen versteht, auf die Form zurückführen:

$$2\Delta = ax + by + c.$$

Es ist dieses die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie, denn durch Veränderung der gegebenen Grössen in der umgekehrten Aufgabe kann man jede beliebige gerade Linie als den geometrischen Ort der Spitze des Dreiecks erhalten.

Wir regen hier nur die umgekehrte Frage an, ob jene

Digitized by Google

Gleichung mit irgend welchen gegebenen reellen Coefficienten a, b, c sich immer als eine gerade Linie geometrisch deuten lässt? In der nächstfolgenden Vorlesung werden wir die Frage wieder aufnehmen.

Die Richtung einer geraden Linie ist gegeben durch den Winkel, den dieselbe mit einer der Coordinatenaxen bildet. Der Symmetrie wegen ziehen wir es jedoch vor, die Richtung einer geraden Linie durch die Winkel α und β zu bezeichnen, welche dieselbe respective mit der positiven x Axe und y Axe bildet.

Da die Summe der beiden Winkel immer einen Rechten beträgt, so hat man $\cos\beta = \sin\alpha$ und daher:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

eine Gleichung, welche wir bei unserer Bezeichnung als sich von selbst verstehend zu nehmen haben.

Da es sich nur um die Richtung der geraden Linie handelt, so können wir der Einfachheit wegen annehmen, dass die gerade Linie durch den Coordinatenanfangspunkt gehe. Schneiden wir auf dieser geraden Linie, vom Coordinatenanfangspunkt ausgehend, ein Stück ab gleich der Einheit, so sind die Coordinaten des zweiten, dieses Stück begrenzenden, Punktes $\cos\alpha$ und $\cos\beta$.

Wenn wir zwei durch ihre Richtungen gegebene gerade Linien combiniren, wie in der ersten Aufgabe zwei Punkte, so können wir uns die analoge Aufgabe stellen:

Den Winkel v zu bestimmen, den zwei gerade Linien einschliessen, deren Richtungen gegeben sind durch die Winkel $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$, welche sie mit den Coordinatenaxen bilden.

Wir nehmen an, dass jede der beiden geraden Linien durch den Coordinatenanfangspunkt gehe. Wir schneiden vom Coordinatenanfangspunkt auf jeder derselben ein Stück ab gleich der Einheit und verbinden die Endpunkte der abgeschnittenen Stücke durch eine gerade Linie. Dadurch entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Das Quadrat der ungleichen Seite drücken wir doppelt aus; ein Mal durch die zwei gleichen Seiten des Dreiecks und den eingeschlossenen Winkel nach der bekannten Formel der Trigonometrie: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$:

$$2 - 2\cos v,$$

Digitized by Google

das andere Mal durch die Coordinaten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$ der die ungleiche Seite begrenzenden Ecken des Dreiecks mit Hülfe der Gleichung (1):

$$(\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2.$$

Setzen wir beide Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir mit Rücksicht auf (4)

(5) . . . . . $\cos v = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1$.

Ob der Winkel v ein spitzer oder stumpfer sei, hängt ab von dem Vorzeichen des Ausdruckes für $\cos v$.

Wenn man den Sinus des Winkels v durch seinen Cosinus ausdrückt, so erhält man aus (5), abgesehen von dem Vorzeichen, welches dem Sinus beizugeben ist:

(6) . . . . . $\sin v = \cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta$.

Diese Gleichung ist ein specieller Fall der Gleichung (2). Denn wenn das Dreieck Δ zwei von dem Coordinatenanfangspunkt ausgehende gleiche Seiten hat, jede gleich der Längeneinheit, den Winkel v einschliessend, so wird $2\Delta = \sin v$, und die Coordinaten der beiden anderen Ecken des Dreiecks werden die Cosinus der Winkel, welche die gleichen Schenkel mit den Coordinatenaxen bilden.

Zweite Vorlesung.

Die gerade Linie.

Wir haben in der vorigen Vorlesung in (3) die Gleichung einer geraden Linie gegeben. Diese Gleichung ist nichts anderes als der analytische Ausdruck für eine bestimmte charakteristische Eigenschaft eines variabeln Punktes p in der geraden Linie.

Um dieses klar zu machen, ziehen wir eine begrenzte gerade Linie $p_1\,p_2$ parallel der genannten, jedoch so, dass das Dreieck $p\,p_1\,p_2$ mit der gegebenen Grundlinie $p_1\,p_2$ einen gegebenen Flächeninhalt Δ hat. Wir bezeichnen die Coordinaten

Digitized by Google

der Ecken $p\,p_1\,p_2$ des Dreiecks mit $x\,y$, $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$. Alsdann stellt der rechte Theil der Gleichung (3) den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks dar mit der variabeln Spitze p und der gegebenen Grundlinie $p_1\,p_2$, und die Gleichung selbst sagt aus, der Flächeninhalt soll ein gegebener sein. Da aber Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalte auch gleiche Höhen haben, so drücken wir dasselbe, die Gleichung (3), nur anders aus, wenn wir sagen, der senkrechte Abstand des variabeln Punktes p, der Spitze des Dreiecks, von der Grundlinie $p_1\,p_2$ soll unverändert bleiben. Das ist aber gerade der Charakter aller Punkte p einer geraden Linie, dass ihre senkrechten Abstände von einer gegebenen anderen geraden Linie $p_1\,p_2$ unverändert bleiben.

Sind die senkrechten Abstände sämmtlich gleich 0, so ist auch $2\,\Delta$ gleich 0. Setzt man daher in der betrachteten Gleichung (3) $2\,\Delta$ gleich 0, so hat man die Gleichung der geraden Linie, welche durch irgend zwei durch ihre Coordinaten $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ gegebene Punkte geht.

Man braucht nur irgend eine charakteristische Eigenschaft des variabeln Punktes auf einer geraden Linie durch die Coordinaten des Punktes in Form einer Gleichung auszudrücken; die Gleichung wird immer die Gleichung der geraden Linie sein. Ein Beispiel soll dieses erläutern.

Wenn man in einem beliebigen, aber festen Punkte einer geraden Linie zwei gleich grosse Lothe errichtet nach den entgegengesetzten Seiten der geraden Linie, so ist es eine charakteristische Eigenschaft eines beliebigen Punktes p in der geraden Linie, dass die Entfernungen dieses Punktes von den Endpunkten q, q' der Lothe einander gleich sind. Nimmt man die Coordinaten der Punkte q und q' als gegeben an, drückt die Quadrate der Entfernungen des durch seine Coordinaten $x\,y$ bestimmten Punktes p von den beiden Punkten q und q' mit Hülfe von (1) aus und setzt diese Quadrate einander gleich, so wird man die Gleichung der geraden Linie erhalten müssen, weil diese Gleichung eben der analytische Ausdruck für die genannte charakteristische Eigenschaft ist.

Der Einfachheit wegen werden wir jedoch annehmen, dass der Punkt q' der Coordinatenanfangspunkt sei. Alsdann erhält man den Punkt q, wenn man von dem Coordinatenanfangspunkt

Digitized by Google

ein Loth auf die gerade Linie fällt und dieses Loth noch um sich selbst verlängert. Der Endpunkt q dieser Verlängerung habe die Coordinaten $a\ b$. Drückt man nun jene charakteristische Eigenschaft $(pq')^2 = (pq)^2$ durch die Coordinaten der bezeichneten Punkte aus, so erhält man die Gleichung der geraden Linie:

$$(1) \ldots\ldots\ x^2 + y^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

die man auch zurückführen kann auf:

$$(2) \ldots\ldots\ ax + by - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0.$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichung einer geraden Linie immer auf die Form zurückgeführt werden kann:

$$(3) \ldots\ldots\ Ax + By + C = 0.$$

Es drängt sich uns zunächst die schon in der vorhergehenden Vorlesung angeregte Frage auf, ob jede Gleichung von der Form (3) eine gerade Linie repräsentirt, welche reellen Werthe auch die Coefficienten A, B, C haben. Wir werden diese Frage dadurch beantworten, dass wir die Gleichung (3) mit einem solchen Factor μ multipliciren, dass der linke Theil derselben in den linken Theil der Gleichung (2) übergeht. Da aber aus der Gleichung (2) die Gleichung (1) wieder hergestellt werden kann, so führen wir damit die mit dem Factor μ multiplicirte Gleichung (3) auf die Gleichung (1) zurück, deren geometrische Bedeutung von selbst einleuchtet.

Da der linke, mit dem Factor μ multiplicirte, Theil der Gleichung (3) dem linken Theile der Gleichung (2) gleich sein soll, so hat man:

$$\mu A = a \quad \mu B = b \quad \mu C = -\frac{a^2 + b^2}{2},$$

woraus sich die reellen Werthe von μ, a, b ergeben:

$$\mu = \frac{-2C}{A^2 + B^2} \quad a = \frac{-2CA}{A^2 + B^2} \quad b = \frac{-2CB}{A^2 + B^2}.$$

Die Gleichung (3) mit den willkürlichen Constanten A, B, C wird die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie genannt zum Unterschiede von der nächstfolgenden, die in vielen Fällen grosse Vortheile bietet.

Auf die eben angedeutete Form gelangt man, wenn man in (2) statt der Coordinaten a, b des Punktes q die Winkel α. β ein-

Digitized by Google

führt, welche das von dem Coordinatenanfangspunkte auf die gerade Linie gefällte Loth mit den positiven Coordinatenaxen bildet, und den senkrechten Abstand δ — die Länge des Lothes — der geraden Linie von dem Coordinatenanfangspunkte. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Coordinaten des Punktes q und die Coordinatenaxen ein Rechteck begrenzen, dessen Diagonale 2δ mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β bildet. Wir haben hiernach:

$$a = 2\delta \cos \alpha \qquad b = 2\delta \cos \beta,$$

und wenn wir diese Werthe von a und b in (2) einsetzen, erhalten wir mit Rücksicht auf (4) der ersten Vorlesung:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0.$$

Diese Form der Gleichung wird die Normalform der Gleichung einer geraden Linie genannt. In ihr bedeuten α und β die Winkel, welche das vom Coordinatenanfangspunkte auf die gerade Linie gefällte Loth mit den positiven Coordinatenaxen bildet, und δ die Länge des Lothes, welche unter allen Umständen als eine positive Grösse genommen wird.

Die Zusammenstellung der beiden Gleichungsformen für die gerade Linie führt auf die Aufgabe:

Die gegebene Gleichung einer geraden Linie in der allgemeinen Form (3) soll zurückgeführt werden auf die Normalform (4), oder, was dasselbe ist, die Winkel α, β sollen bestimmt werden, welche das vom Coordinatenanfangspunkt auf die gerade Linie gefällte Loth mit den Coordinatenaxen bildet, und die Länge δ des Lothes.

Wenn (3) und (4) die Gleichungen derselben geraden Linie sind, so können sie sich nur durch einen Factor unterscheiden. Multiplicirt man daher die Gleichung (3) mit einem Factor μ, so wird sich derselbe so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (3) und (4) Glied für Glied mit einander übereinstimmen.

Man hat daher:

$$\mu A = \cos \alpha \qquad \mu B = \cos \beta \qquad \mu C = -\delta.$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man mit Zuziehung der Gleichung $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ die vier Unbekannten $\alpha, \beta, \delta, \mu$ berechnen, wodurch man erhält:

Digitized by Google

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(5) . . . . . .

$$\delta = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\mu = \frac{-1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Was das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{A^2 + B^2}$ betrifft, so hat man in allen diesen Formeln das entgegengesetzte Vorzeichen von C zu nehmen, damit δ wirklich positiv wird. Wir machen hier besonders noch auf den Factor $\mu = \frac{-1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ aufmerksam, durch welchen die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie zurückgeführt wird auf die Normalform.

Obwohl wir zwei Gleichungsformen der geraden Linie hervorgehoben haben, die allgemeine (3) und die specielle (4), so werden wir, wenn wir die specielle Form für die Lösung unserer Aufgaben geeigneter erachten, was oft der Fall sein wird, nicht nöthig haben, die Aufgaben besonders noch für die allgemeine Form zu lösen. Die Formeln (5) vermitteln immer den Uebergang von der speciellen Form (4) zur allgemeinen (3).

Die Gleichung einer geraden Linie zu bestimmen, welche einer gegebenen (4) parallel ist und von dem Coordinatenanfangspunkt nach entgegengesetzter Richtung denselben Abstand hat.

Man sieht ohne Mühe, dass:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + \delta = 0$$

die Gleichung der geraden Linie sein muss. Aber diese Form ist nicht die Normalform der Gleichung; ihr ganz constantes Glied müsste negativ sein.

Wir führen diese Gleichung durch Multiplication mit dem Factor $\mu = -1$ aus (5) auf die Normalform zurück, welche sich dann so darstellt:

$$x\cos(2R + \alpha) + y\cos(2R + \beta) - \delta = 0.$$

Will man nachweisen, dass ein durch seine Coordinaten gegebener Punkt in einer durch ihre Gleichung gegebenen geraden

Digitized by Google

Linie liegt, so braucht man nur in die Gleichung die Coordinaten des gegebenen Punktes für die Variabeln zu setzen. Wird der Gleichung dadurch genügt, so ist das ein Beweis, dass der Punkt in der geraden Linie liegt*). Wird der Gleichung nicht genügt, so liegt der Punkt nicht in der geraden Linie, der Abstand des Punktes von der geraden Linie hat vielmehr einen von 0 verschiedenen Werth. Diese Bemerkung giebt Veranlassung zu der Aufgabe:

Den senkrechten Abstand Δ eines durch seine Coordinaten X, Y gegebenen Punktes P von einer durch ihre Gleichung in der Normalform (4) gegebenen geraden Linie zu bestimmen.

Da der senkrechte Abstand des Coordinatenanfangspunktes δ von der gegebenen geraden Linie unter allen Umständen eine

---

*) Das angegebene Kriterium, dass ein Punkt in einer geraden Linie liege, dient zur directen Auflösung der Aufgabe:

Die Gleichung der geraden Linie zu bestimmen, welche durch irgend zwei durch ihre Coordinaten $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ gegebenen Punkte geht,

deren Lösung sich aus den am Anfange der Vorlesung angestellten allgemeinen Betrachtungen nebenbei ergab.

Die Gleichung der gesuchten geraden Linie hat nämlich die Form:

$$Ax + By + C = 0.$$

In ihr haben die Verhältnisse der drei Coefficienten A, B, C ganz bestimmte Werthe, die gegeben sind durch die Bedingungen:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Drückt man nun die Verhältnisse der drei Coefficienten durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen aus, und setzt dieselben in die erste Gleichung, so erhält man gerade die Gleichung:

$$2\Delta = 0,$$

wenn man unter 2Δ den in (3) der ersten Vorlesung gegebenen Ausdruck versteht.

Wir können daher sagen, die gesuchte Gleichung $2\Delta = 0$ der geraden Linie sei das Resultat der Elimination der Unbekannten A, B, C aus den drei ersten Gleichungen.

Die Aufgabe ist hierdurch zwar gelöset, aber die Auflösung giebt nicht die geometrische Bedeutung des Ausdruckes 2Δ, wie in der ersten Vorlesung, wenn der variable Punkt $x\, y$ und die beiden gegebenen Punkte $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ nicht in einer und derselben geraden Linie liegen.

Digitized by Google

positive Grösse ist, so wird der senkrechte Abstand Δ des gegebenen Punktes P von der gegebenen geraden Linie positiv oder negativ sein, je nachdem dieser Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkte auf derselben Seite der geraden Linie liegt, oder auf der entgegengesetzten. Um nun ein positives Δ im Auge zu haben, werden wir annehmen, der gegebene Punkt P liege mit dem Coordinatenanfangspunkte auf derselben Seite der durch ihre Gleichung:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$$

gegebenen geraden Linie.

Ziehen wir eine zweite parallele gerade Linie durch den gegebenen Punkt P, so muss ihre Gleichung sein

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta' = 0,$$

wenn δ' den senkrechten Abstand der geraden Linie von dem Coordinatenanfangspunkt bedeutet. Da der Punkt P aber auf dieser letzteren geraden Linie liegt, so hat man:

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta - \delta' = 0.$$

Da ferner ist:

$$\Delta = \delta - \delta',$$

so erhält man, wenn man den Werth von δ' aus der vorhergehenden Gleichung in diese setzt:

$$-\Delta = X \cos \alpha + Y \cos \beta - \delta.$$

Für den späteren Gebrauch ist es nützlich, dieses Resultat als eine Regel darzustellen, welcher wir folgenden Ausdruck geben:

(6) . . . Wenn man den linken Theil einer in der Normalform (4) gegebenen Gleichung einer geraden Linie von ihrem rechten Theile, der $= 0$ ist, trennt, so drückt derselbe den negativen senkrechten Abstand aus des durch die Coordinaten x, y gegebenen Punktes von der geraden Linie.

Figuren, welche aus mehren geraden Linien zusammengesetzt sind, werden durch eben so viele Gleichungen von der Form (3) oder (4) analytisch dargestellt. Um diese Gleichungen nicht jedes Mal ausführlich hinzuschreiben, führen wir die Symbole U und Δ ein für die Ausdrücke:

Digitized by Google

(7) . . . . . $U \equiv Ax + By + C$

(8) . . . . . $A \equiv x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta$

Wir werden ferner mit $U_0\ U_1 \ldots$ und mit $A_0\ A_1 \ldots$ andere Ausdrücke bezeichnen von denselben Formen als respective U und A, aber mit veränderten Werthen der Coefficienten.

Dadurch verschaffen wir uns das Mittel, irgend ein System von beliebig vielen geraden Linien analytisch leicht darzustellen in der allgemeinen Form:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \ldots$$

oder in der Normalform:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \ldots$$

Von dieser Bezeichnung werden wir Gebrauch machen, um mit Hülfe der Regel (6) den geometrischen Ort eines Punktes p zu bestimmen, der von zwei durch ihre Gleichungen in der Normalform:

(9) . . . . . $A = 0$ und $A_1 = 0$

gegebenen geraden Linien gleich weit absteht.

Liegt der Punkt p, dessen Coordinaten seien x, y, in dem von den beiden gegebenen geraden Linien gebildeten Winkel, in welchem auch der Coordinatenanfangspunkt liegt, so sind die senkrechten Abstände des Punktes von den beiden geraden Linien $-A$ und $-A_1$; liegt der Punkt p aber in dem Scheitelwinkel, so sind sie $+A$ und $+A_1$.

In dem einen, wie in dem anderen Falle, erhalten wir die Gleichung:

(10) . . . . . $A - A_1 = 0$

als Bedingung, dass die senkrechten Abstände einander gleich seien.

Es ist dieses offenbar die Gleichung einer geraden Linie. Die gerade Linie selbst ist der geometrische Ort des Punktes p. Nun weiss man aber, dass der geometrische Ort des Punktes p die Halbirungslinie ist des von den beiden gegebenen geraden Linien gebildeten Winkels. Daraus muss man schliessen, dass die Gleichung (10) die Halbirungslinie des Winkels darstellt, den die beiden geraden Linien (9) einschliessen. Da aber zwei unbegrenzte gerade Linien zwei Winkel bilden, so muss man, um jede Zwei-

Digitized by Google

deutigkeit zu beseitigen, mit Rücksicht auf das Vorhergehende noch hinzufügen, dass der Winkel gemeint sei, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt, oder sein Scheitelwinkel.

Liegt der Punkt p in einem der Nebenwinkel, so können die senkrechten Abstände dieses Punktes von den beiden gegebenen geraden Linien zwar auch einander gleich sein, sie haben aber entgegengesetzte Vorzeichen. Sucht man nun den geometrischen Ort des Punktes p, dessen senkrechte Abstände von den beiden gegebenen geraden Linien gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind, so drückt sich diese Bedingung durch die Gleichung aus:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots A + A_1 = 0.$$

Es ist dieses die Gleichung der, die Nebenwinkel halbirenden, geraden Linie.

Wir fassen die Resultate unserer Untersuchung kurz zusammen, wenn wir sagen:

(12) . . . Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier gegebenen geraden Linien in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen der geraden Linien, welche die Winkel halbiren, die die gegebenen geraden Linien mit einander bilden.

Wir wollen auch über dieses so einfache Resultat nicht fortgehen, ohne daran eine Bemerkung zu knüpfen, welche auf weitere Fragen führt.

Die geraden Linien (10) und (11) gehen durch den Schnittpunkt der gegebenen beiden geraden Linien. Ihre Gleichungen sind linear zusammengesetzt aus den Gleichungen der gegebenen geraden Linien. Hiernach kann man fragen, ob jede Gleichung, die in linearer Weise zusammengesetzt ist aus den Gleichungen zweier geraden Linien, eine gerade Linie repräsentirt, welche durch den Schnittpunkt jener geht?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir die allgemeine Form der Gleichungen zweier geraden Linien:

$$U = 0 \quad U_1 = 0$$

Digitized by Google

und combiniren aus ihnen in linearer Weise die Gleichung einer dritten geraden Linie:

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 = 0.$$

Ob diese gerade Linie durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht, erfahren wir, wenn wir die Coordinaten x und y aus den beiden ersten Gleichungen berechnen und ihre Werthe in die dritte Gleichung setzen. Wird dieser Gleichung dadurch genügt, so ist das ein Beweis, dass die dritte gerade Linie durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht. Die drei geraden Linien schneiden sich dann in einem und demselben Punkte. Eine einfache Betrachtung wird aber zeigen, dass es der angedeuteten Berechnung gar nicht bedarf.

Denken wir uns die Werthe der Coordinaten aus den beiden ersten Gleichungen berechnet und setzen diese Werthe in U und U_1 ein, so müssen diese Ausdrücke einzeln verschwinden (zu 0 werden). Denn dieses ist ja die Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Setzt man nun dieselben Werthe in die dritte Gleichung, so verschwinden die einzelnen Glieder links vom Gleichheitszeichen. Es wird der Gleichung dadurch genügt. Demnach schneiden sich die durch die drei Gleichungen analytisch dargestellten geraden Linien in einem und demselben Punkte. Wir drücken dieses anders aus, wenn wir sagen:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von drei geraden Linien $U=0$ $U_1=0$ $U_2=0$ die Identität obwaltet:

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0,$$

so schneiden sich die drei geraden Linien in einem und demselben Punkte.

Die genannte identische Gleichung sagt nämlich nichts anderes aus, als dass unter dem Ausdruck $-\lambda_2 U_2$ der Ausdruck $\lambda U + \lambda_1 U_1$ verstanden werden soll.

Man kann aber auch den Satz umkehren:

(14) . . . Wenn $U=0$ $U_1=0$ $U_2=0$ die Gleichungen von drei geraden Linien sind, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, so kann man immer

Digitized by Google

drei Factoren λ, λ_1, λ_2 so bestimmen, dass man identisch hat:

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0$$

Nach dem vorhergehenden Satze (13) ist $\lambda U + \lambda_1 U_1 = 0$ die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den gemeinsamen Schnittpunkt der genannten drei geraden Linien geht. Da diese Gleichung noch die willkürlichen Constanten λ, λ_1 enthält, so kann man letztere so bestimmen, dass jene gerade Linie durch einen gegebenen Punkt der geraden Linie $U_2 = 0$ geht. Denn diese verlangt nur, dass einer Bedingungsgleichung genügt werde. Damit fallen aber die beiden geraden Linien $\lambda U + \lambda_1 U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ zusammen, was eben jene identische Gleichung analytisch ausdrückt.

Um gleich eine Anwendung der vorausgegangenen Principien zu machen, betrachten wir ein Dreieck, dessen Seiten 0, 1, 2 gegeben seien durch ihre Gleichungen in der Normalform:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Wenn wir annehmen, dass der Coordinatenanfangspunkt innerhalb des Dreiecks liegt, so sind die Gleichungen der Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad A_2 - A_0 = 0 \quad A_0 - A_1 = 0.$$

Da die Summe der linken Theile dieser drei Gleichungen identisch gleich 0 ist, also:

$$(A_1 - A_2) + (A_2 - A_0) + (A_0 - A_1) \equiv 0,$$

so haben wir durch diese Bemerkung nach (13) den Satz bewiesen:

Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte*).

---

*) An den Beweis des bezeichneten geometrischen Satzes wollen wir eine Bemerkung knüpfen. Derselbe wurde geführt mit sehr einfachen, in dieser Vorlesung entwickelten Hülfsmitteln. Aber auch ohne diese Hülfsmittel lässt sich der Beweis des Satzes, so wie jedes anderen geometrischen Satzes, mit den allgemeinen Principien der analytischen Geometrie führen, freilich nicht ohne Rechnung.

Ohne jene Hülfsmittel hätte man aus den durch ihre Gleichungen gegebenen Seiten des Dreiecks die Coordinaten der Ecken zu berech-

Digitized by Google

Dieser Punkt ist bekanntlich der Mittelpunkt des dem Dreiecke einbeschriebenen Kreises.

Nach (12) hat man die Gleichungen der, die Aussenwinkel des Dreiecks halbirenden, geraden Linien:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad A_2 + A_0 = 0 \quad A_0 + A_1 = 0.$$

Combiniren wir diese mit den schon angegebenen Gleichungen der, die inneren Winkel des Dreiecks halbirenden, geraden Linien, so ergeben sich noch folgende identische Gleichungen:

---

nen. Man hätte ferner die Constanten in den Gleichungen von drei geraden Linien so zu bestimmen, dass erstens jede derselben durch eine Ecke des Dreiecks geht und zweitens, mit Anwendung von (5) der ersten Vorlesung, dass jede derselben den Winkel des Dreiecks halbirt, den sie theilt. Wenn die Gleichungen der Seiten des Dreiecks in der Normalform gegeben wären, so würde es sich zeigen, dass die Gleichungen der Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks die Differenzen der Gleichungen der Seiten sind. Aus zwei von diesen Gleichungen hätte man endlich die Coordinaten des Schnittpunktes zu berechnen und sie in die dritte Gleichung einzusetzen. Dann würde man sehen, dass die dritte Gleichung erfüllt wird, was eben den Satz beweiset. Würde sie nicht erfüllt, so würde das ein Beweis sein, dass der Satz nicht zutrifft.

In dieser Weise kann man für jeden geometrischen Satz einen analytischen Beweis geben. Man braucht aber nur einmal solche Rechnungen mit den allgemeinen Principien durchzuführen, um die Lust an weiteren Versuchen zu verlieren.

Die allgemeinen Principien bezeichnen allerdings den Weg, den man einschlagen kann, um zum gewünschten Resultate zu gelangen, nicht den einfacheren Weg, den man in einem gegebenen Falle wählen soll.

Die mechanischen Arbeiten, welche die allgemeinen Principien verlangen, sind um so grösser, je ausgedehnter die Theorie, je grösser der Kreis der Aufgaben ist, den sie umfasst. Mit der Vervollkommnung der Wissenschaft wird die Theorie derselben endlich so weit umfassend und die mechanischen Arbeiten, welche sie verlangt, werden so ausgedehnt, dass man sich genöthiget sieht, innerhalb der allgemeinen Theorie specielle Theorien wiederherzustellen, welche kleinere Kreise von Aufgaben mit entsprechender Leichtigkeit lösen.

Die speciellen Theorien der analytischen Geometrie sind es aber, welchen diese Vorlesungen gewidmet sind. Die allgemeine Theorie hat man in der Differential- und Integral-Rechnung als deren Anwendung auf die Geometrie zu suchen.

Digitized by Google

$$(A_2 + A_0) - (A_0 + A_1) + (A_1 - A_2) \equiv 0$$
$$(A_0 + A_1) - (A_1 + A_2) + (A_2 - A_0) \equiv 0$$
$$(A_1 + A_2) - (A_2 + A_0) + (A_0 - A_1) \equiv 0.$$

Jede dieser Gleichungen drückt nach (13) einen geometrischen Satz aus. Wir können aber alle diese Sätze in dem einen Satze zusammenfassen:

Die Halbirungslinien zweier äusseren und des dritten inneren Winkels eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Dieser Punkt ist bekanntlich der Mittelpunkt des, die Seiten des Dreiecks ausserhalb berührenden, Kreises. Man hat drei solcher Kreise.

Weitere geometrische Sätze ergeben sich aus der Betrachtung der Gleichungen von geraden Linien:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0$$
$$-A_0 + A_1 + A_2 = 0$$
$$A_0 - A_1 + A_2 = 0$$
$$A_0 + A_1 - A_2 = 0,$$

wenn man ihre Zusammensetzung aus den vorhergehenden Gleichungen in Betracht zieht.

Die erste Gleichung ist nämlich linear zusammengesetzt aus den Gleichungspaaren $A_0 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$, aus $A_1 = 0$, $A_2 + A_0 = 0$ und aus $A_2 = 0$, $A_0 + A_1 = 0$. Die durch die erste Gleichung dargestellte gerade Linie geht also nach (13) durch die drei Schnittpunkte der durch jene Gleichungspaare dargestellten Linienpaare. Wir drücken dieses durch folgenden Satz aus:

Wenn man in einem Dreieck die Aussenwinkel halbirt, so schneiden die Halbirungslinien die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

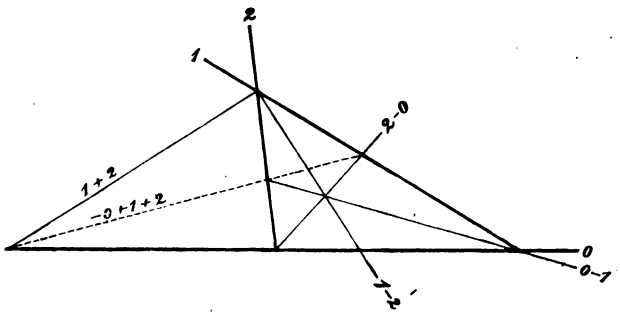
Aus den drei letzten Gleichungen kann man auf dieselbe Weise den Satz ablesen:

Die Halbirungslinien zweier innerer Winkel und des dritten Aussenwinkels eines Dreiecks schneiden

Digitized by Google

die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

Fig. 4.



Vorstehende Figur dient zur Erläuterung des letzten Satzes, die geraden Linien in derselben sind mit Weglassung der Symbole nur mit den ihnen entsprechenden Indices bezeichnet.

Um schliesslich noch eine Anwendung zu machen von dem Satze (14), behandeln wir die Aufgabe:

Wenn die Gleichungen von drei geraden Linien 0, 1, 2 in der Normalform $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ gegeben sind, so soll die Gleichung der geraden Linie gefunden werden, welche senkrecht steht auf der ersten geraden Linie und durch den Schnittpunkt der beiden anderen geht.

Die Gleichung der geraden Linie, welche durch den Schnittpunkt der geraden Linien $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ geht, kann nach dem angegebenen Satze nur die Form haben:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0.$$

Das Loth der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$(\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_2 \cos\alpha_2) : (\lambda_1 \cos\beta_1 + \lambda_2 \cos\beta_2).$$

Das Loth der geraden Linie $A_0 = 0$ bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus sind:

$$\cos\alpha_0 : \cos\beta_0.$$

Da die beiden Lothe aber einen rechten Winkel einschliessen

Digitized by Google

sollen, dessen Cosinus gleich 0 ist, so haben wir nach (5) der ersten Vorlesung:

$$0 = \cos\alpha_0 \,(\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_2 \cos\alpha_2) + \cos\beta_0 \,(\lambda_1 \cos\beta_1 + \lambda_2 \cos\beta_2).$$

Wenn wir nun mit a_1 und a_2 die Winkel bezeichnen, welche die gerade Linie 0 mit den beiden anderen 1 und 2 bildet — welches zugleich die Winkel sind, die ihre Lothe mit einander bilden — so lässt sich die angegebene Gleichung mit Berücksichtigung von (5) der ersten Vorlesung kürzer so ausdrücken:

$$\lambda_1 \cos a_1 + \lambda_2 \cos a_2 = 0.$$

Setzen wir das durch diese Gleichung bestimmte Verhältniss der Constanten λ_1 und λ_2 in die erste Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung der gesuchten geraden Linie:

$$A_1 \cos a_1 - A_2 \cos a_2 = 0.$$

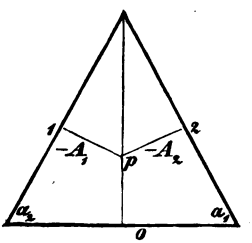
Einfacher lässt sich dieses Resultat aus der Figur selbst ablesen. Denn nehmen wir auf der gesuchten geraden Linie einen beliebigen Punkt p mit den Coordinaten x, y, dessen Entfernung von dem Schnittpunkte der beiden geraden Linien 1 und 2 wir mit r bezeichnen, so sind $-A_1$ und $-A_2$ die senkrechten Abstände dieses Punktes p von den beiden geraden Linien, die sich in der Figur auch so ausdrücken lassen:

$$-A_1 = r\cos a_2 \qquad -A_2 = r\cos a_1,$$

woraus durch Elimination von r dasselbe Resultat hervorgeht.

Die gegebenen drei geraden Linien bilden ein Dreieck. Wenn wir die den Seiten 0, 1, 2 des Dreiecks gegenüberliegenden Winkel mit a_0, a_1, a_2 bezeichnen, so sind die Gleichungen der von den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel:

Fig. 5.



$$A_1 \cos a_1 - A_2 \cos a_2 = 0$$
$$A_2 \cos a_2 - A_0 \cos a_0 = 0$$
$$A_0 \cos a_0 - A_1 \cos a_1 = 0.$$

Da die Summe dieser drei Gleichungen identisch 0 ist, so haben wir nach (13) den Satz bewiesen:

Die drei Perpendikel, welche von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Digitized by Google

Dritte Vorlesung.

Harmonische Linien. Linien der Involution.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung unter Anderem den geometrischen Ort (10) eines Punktes p bestimmt, dessen senkrechte Abstände von zwei gegebenen geraden Linien (9) einander gleich sind. Die hierdurch gelösete Aufgabe erweitern wir, wenn wir den geometrischen Ort eines Punktes p suchen, dessen senkrechte Abstände von zwei gegebenen geraden Linien 0 und 1 sich wie zwei gegebene Grössen a_0 und a_1 verhalten.

Wenn:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linien in der Normalform und x, y die Coordinaten des Punktes p sind, so finden wir auf dem in der vorhergehenden Vorlesung angedeuteten Wege den gesuchten geometrischen Ort durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0.$$

Es ist dieses die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen geraden Linien geht, und wenn wir unter a_0 und a_1 positive Grössen verstehen, so theilt die gerade Linie (2) den von den gegebenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt.

Wir bringen diese Gleichung, indem wir setzen $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$ auf die Form:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0$$

und bemerken, dass, wenn λ negativ wird, die gerade Linie den von den gegebenen beiden geraden Linien eingeschlossenen Winkel theilt, in welchem der Coordinatenanfangspunkt nicht liegt.

Diese Gleichung mit dem unbestimmten Factor λ stellt jede beliebige gerade Linie dar, welche durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen geht. Denn man kann den Factor λ immer so

Digitized by Google

bestimmen, dass die gerade Linie durch noch einen gegebenen Punkt geht. Ist der Factor λ positiv, so theilt die gerade Linie den von den gegebenen geraden Linien eingeschlossenen Winkel, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt; ist er negativ, so theilt sie den Nebenwinkel. Die Grenzwerthe von $\lambda = 0$ und $= \infty$ entsprechen den gegebenen geraden Linien.

Die durch die Gleichung (3) dargestellte gerade Linie 2 bildet mit den gegebenen 0 und 1 die Winkel (20) und (21). Da die Sinus dieser Winkel sich verhalten wie die gegebenen Grössen a_0 und a_1, so können wir die geometrische Bedeutung des Factors λ auch durch die Gleichung ausdrücken:

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda = \frac{\sin(20)}{\sin(21)}.$$

Eine beliebige andere, ebenfalls durch den Schnittpunkt der gegebenen geraden Linien 0 und 1 gehende gerade Linie 3 hat zur Gleichung:

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots A_0 - \mu A_1 = 0.$$

Das Verhältniss:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(20)}{\sin(21)} : \frac{\sin(30)}{\sin(31)}$$

zwischen den Sinus der von den Linienpaaren 0, 1 und 2, 3 eingeschlossenen Winkel nennt man das anharmonische Verhältniss des Linienpaares 2, 3 zu dem Linienpaare 0, 1.

Wenn die Gleichungen (1) nicht die Normalform hätten, so würde die geometrische Bedeutung von λ in der Gleichung (3) nicht durch die Gleichung (4) ausgedrückt werden können. Es drängt sich daher die Frage auf nach dem anharmonischen Verhältnisse zweier Linienpaare, deren Gleichungen in der Form gegeben sind:

$$(7) \ldots V_0 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_0 - l V_1 = 0 \quad V_0 - m V_1 = 0.$$

Da die allgemeinen Formen V_0 und V_1 durch Factoren μ_0 und μ_1 sich immer auf die Normalformen A_0 und A_1 zurückführen lassen, so hat man $V_0 = \frac{1}{\mu_0} A_0$ und $V_1 = \frac{1}{\mu_1} A_1$. Setzt man diese Werthe von V_0 und V_1 in die angegebenen Gleichungen (7), so gehen sie über in Gleichungen von der vorhergehenden Form:

Digitized by Google

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_0 - l\frac{\mu_0}{\mu_1}A_1 = 0 \quad A_0 - m\frac{\mu_0}{\mu_1}A_1 = 0,$$

woraus sich das anharmonische Verhältniss:

(8) . . . . . $\frac{l}{m}$

der beiden Linienpaare (7) ergiebt.

Fassen wir die Frage nach dem anharmonischen Verhältnisse noch allgemeiner, so kommen wir auf die Aufgabe:

Gegeben sind die Gleichungen von vier geraden Linien, die sich in einem und demselben Punkte schneiden, in der Form:

(9) $U_0 - \lambda U_1 = 0 \quad U_0 - \mu U_1 = 0 \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0 \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0,$

das anharmonische Verhältniss des letzten Linienpaares zu dem ersten zu bestimmen.

Wir führen die Aufgabe auf die vorhergehende Frage zurück, wenn wir mit V_0 und V_1 die Ausdrücke bezeichnen: $U_0 - \lambda U_1 = V_0$, $U_0 - \mu U_1 = V_1$, diese beiden Gleichungen nach U_0 und U_1 auflösen und ihre Werthe in die Gleichungen (9) setzen. Denn dadurch nehmen die Gleichungen (9) die Form der Gleichungen (7) an, und das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ wird, wenn wir die Werthe von l und m berechnen:

(10) . . . . . $\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}$.

Das anharmonische Verhältniss wird zu einem harmonischen Verhältniss, wenn es den Werth -1 annimmt. In diesem Falle werden jene, von einem und demselben Punkte ausgehenden, geraden Linien harmonische Linienpaare genannt.

Es stellen hiernach mit Rücksicht auf das anharmonische Verhältniss (8) der Linienpaare (7) die Gleichungen:

(11) . . $V_0 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda V_1 = 0$

irgend zwei harmonische Linienpaare dar. Oder allgemeiner stellen die Gleichungen (9) zwei harmonische Linienpaare dar, wenn das anharmonische Verhältniss (10) den Werth annimmt -1, das heisst unter der Bedingung:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} + \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1} = 0,$$

Digitized by Google

welcher Bedingungsgleichung man auch die Form geben kann:

$$(12) \ldots\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Die geometrische Bedingung für zwei harmonische Linienpaare entnehmen wir aus (6):

$$(13) \ldots\ \frac{\sin(20)}{\sin(21)} + \frac{\sin(30)}{\sin(31)} = 0.$$

Um eine Vorstellung zu bekommen von der Lage zweier harmonischen Linienpaare, muss man die Bedingungsgleichung (13) discutiren. Sie lässt erkennen, dass von zwei harmonischen Linienpaaren drei durch einen und denselben Punkt gehende Linien beliebig angenommen werden können, dass durch sie aber die vierte harmonische Linie bestimmt ist.

Wir werden nun das Linienpaar 0, 1 als fest betrachten, die Linie 2 um den Schnittpunkt der festen Linien drehen und die Lage der vierten harmonischen Linie 3 erforschen.

Von dem harmonischen Linienpaare 2, 3 theilt die eine Linie den einen von den festen Linien 0, 1 gebildeten Winkel, die andere den Nebenwinkel. Im anderen Falle würden die beiden Glieder der Gleichung (13) gleiche Vorzeichen haben, und ihre Summe könnte nicht 0 sein. Halbirt die Linie 2 den von den festen geraden Linien gebildeten Winkel, so halbirt die Linie 3 den Nebenwinkel. Denn unter dieser Voraussetzung wird jedes Glied der Gleichung (13) abgesehen vom Vorzeichen gleich der Einheit. Drehen wir von dieser Halbirungslage aus die Linie 2 so, dass sie sich der Linie 0 nähert, so wird das erste Glied in (13) kleiner als die Einheit. Da der absolute Werth des zweiten Gliedes auch kleiner werden muss als die Einheit, so ist das ein Zeichen, dass auch die Linie 3 sich der Linie 1 nähert. Im Grenzfalle, wenn die Linie 2 mit 0 zusammenfällt, wird das erste Glied verschwinden. Damit auch das zweite Glied verschwinde, ist es nothwendig, dass auch die Linie 3 mit der Linie 0 zusammenfällt. Ebenso wird man erkennen, dass, wenn die Linie 2 aus der Halbirungslage so gedreht wird, dass sie sich der Linie 1 nähert, sich die Linie 3 derselben Linie 1 nähern muss, und dass im Grenzfalle die drei Linien 1, 2, 3 zusammenfallen.

Da durch ein gegebenes Linienpaar das ihm zugeordnete harmonische Linienpaar nicht vollständig bestimmt ist, so werden zwei gegebene, von demselben Punkte ausgehende, Linienpaare

Digitized by Google

erforderlich sein, um das zugeordnete harmonische Linienpaar zu bestimmen; was die Auflösung der folgenden Aufgabe bestätigen wird.

Dasjenige Linienpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist zu zwei Paar gegebener geraden Linien, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Es seien die Gleichungen der beiden gegebenen Linienpaare:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0 \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = 0 \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0$$

und die Gleichungen des gesuchten Linienpaares:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0$$
$$U_0 - \mu U_1 = 0.$$

Dieses letztere ist harmonisch zu jedem der gegebenen Linienpaare unter den aus (12) hergenommenen Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Da in diese Gleichungen das Produkt $\lambda\mu$ und die Summe $\lambda + \mu$ der Unbekannten in linearer Weise eingehen, so kann man ihre Werthe unzweideutig berechnen. Sie seien $\lambda\mu = b$, $\lambda + \mu = a$. Alsdann ist bekanntlich:

$$z^2 - az + b = 0$$

eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die gesuchten Grössen λ und μ sind. Daraus folgt der Satz:

(14) . . . Es giebt immer nur ein bestimmtes Linienpaar, welches harmonisch ist zu zwei gegebenen Linienpaaren, die von einem und demselben Punkte ausgehen.

Dieses Linienpaar ist reell oder imaginär, je nachdem die Wurzeln der erwähnten quadratischen Gleichung reell oder imaginär sind.

Drei Paare Linien, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, bilden eine Involution, wenn ein viertes Linienpaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Linienpaare.

Zwei gegebene Linienpaare, die von einem und demselben Punkte ausgehen, bestimmen, wie man gesehen hat, dasjenige

Digitized by Google

Linienpaar, welches harmonisch ist zu jedem der gegebenen Linienpaare. Ein drittes, zu dem letzteren harmonisches, Linienpaar wird also mit den beiden gegebenen eine Involution bilden. Da aber von diesem dritten Linienpaare eine Linie beliebig durch den gemeinsamen Schnittpunkt aller gelegt werden kann, wodurch erst die andere bestimmt ist, so sieht man, dass von drei Linienpaaren der Involution fünf durch einen und denselben Punkt gehende Linien beliebig gewählt werden können, dass die sechste aber durch sie bestimmt ist.

Zwischen drei Paaren Linien, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden, wird daher eine Bedingungsgleichung stattfinden müssen, wenn die Linienpaare eine Involution bilden.

Es sind die Gleichungen von drei Paar Linien gegeben, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden:

$$(15)\ \ldots\quad \begin{matrix} V_0 - \lambda_0 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_1 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_2 U_2 = 0 \\ V_0 - \mu_0 V_1 = 0 & V_0 - \mu_1 V_1 = 0 & V_0 - \mu_2 U_2 = 0; \end{matrix}$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher die drei Linienpaare eine Involution bilden.

Bilden die drei Linienpaare (15) eine Involution, so hat man nach der Definition ein Linienpaar:

$$\begin{aligned} V_0 - \lambda V_1 &= 0 \\ V_0 - \mu V_1 &= 0, \end{aligned}$$

welches zu jedem derselben harmonisch ist: was zutrifft unter den aus (12) hergenommenen Bedingungen:

$$\begin{aligned} \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 &= 0 \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 &= 0 \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$, welche linear darin vorkommen, so erhält man die gesuchte Bedingungsgleichung, der man leicht folgende Form geben kann:

$$(16)\ (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.$$

Da von den drei Linienpaaren der Involution fünf durch denselben Punkt gehende Linien beliebig gewählt werden können, wodurch die sechste erst bestimmt ist, so können wir im Speciellen annehmen, dass das erste Linienpaar in eine Linie zu-

Digitized by Google

sammenfällt und dass das letzte Linienpaar wieder in eine Linie zusammenfällt. Alsdann bleibt das mittlere Linienpaar übrig und die genannten beiden Linien, von welchen jede zwei Linien in sich aufgenommen hat. Wir wollen die Lage dieser beiden Linienpaare näher bestimmen.

Wenn wir die drei Linienpaare (15) im Auge haben, so drücken wir jene Specialität analytisch aus, indem wir setzen $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$. Dadurch geht aber die Gleichung (16) über in (12). Die geometrische Bedeutung dieses Ueberganges drückt der Satz aus:

(17) . . . Wenn von drei Linienpaaren der Involution das eine Linienpaar mit einer Linie, ein zweites Linienpaar mit einer zweiten Linie zusammenfallen, so ist das dritte Linienpaar der Involution harmonisch zu den beiden Linien.

Es stellen sich hiernach die drei Linienpaare einer Involution als ein allgemeinerer Fall der harmonischen Linienpaare dar, indem von dem einen Paare der letzteren sich jede Linie in ein Linienpaar zerspaltet.

Jede drei Paare Linien, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, lassen sich analytisch auch so darstellen:

$$A_0 = 0 \quad A_0 - l_1 A_1 = 0 \quad A_0 - l_2 A_1 = 0$$
$$A_1 = 0 \quad A_0 - m_1 A_1 = 0 \quad A_0 - m_2 A_1 = 0.$$

Die Gleichungen $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ des ersten Linienpaares, welches wir bezeichnen wollen mit A_0 und B_0, sind in der Normalform gegeben, die Gleichungen des zweiten Linienpaares A_1 und B_1 und des dritten Linienpaares A_2 und B_2 haben diese Form nicht. Wenn wir nun in (16) setzen $\lambda_0 = 0$ und $\mu_0 = \infty$ und zugleich für die Buchstaben λ und μ die Buchstaben l und m setzen, so erhalten wir die Bedingung, dass diese drei Linienpaare eine Involution bilden:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad l_1 m_1 - l_2 m_2 = 0.$$

Setzen wir in diese Bedingungsgleichung für die vier Grössen l und m ihre Werthe nach (4), so erhalten wir die gesuchte geometrische Bedingung für drei Linienpaare $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ der Involution:

Digitized by Google

$$(19) \ldots \quad \frac{\sin(A_1A_0)}{\sin(A_1B_0)} \cdot \frac{\sin(B_1A_0)}{\sin(B_1B_0)} - \frac{\sin(A_2A_0)}{\sin(A_2B_0)} \cdot \frac{\sin(B_2A_0)}{\sin(B_2B_0)} = 0.$$

Aus dieser Gleichung, welche man als Definition dreier, eine Involution bildenden, Linienpaare nehmen kann, gehen noch zwei andere Gleichungen hervor, die man erhält, wenn man das Linienpaar A_0B_0 mit dem Linienpaare A_1B_1 oder mit A_2B_2 vertauscht. Da alle drei Gleichungen nichts anderes sind, als verschiedene Formen für eine und dieselbe Bedingung, so muss sich jede derselben auch direct aus jeder anderen ableiten lassen.

Wir sind bei der Herleitung der Gleichung (19), der Bedingungsgleichung der Involution, von einer besonderen Form der Gleichungen der drei Linienpaare ausgegangen. Auf diese besondere Form kann man aber die allgemeinen Gleichungen (15) von drei Linienpaaren, die in einem Punkte zusammenlaufen, zurückführen, wenn man setzt: $V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{1}{\nu_0} A_0$; $V_0 - \mu_0 V_1 = \frac{1}{\nu_1} A_1$, woraus folgt:

$$V_0 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \left\{ \frac{\mu_0}{\nu_0} A_0 - \frac{\lambda_0}{\nu_1} A_1 \right\}, \quad V_1 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \left\{ \frac{1}{\nu_0} A_0 - \frac{1}{\nu_1} A_1 \right\}.$$

Setzt man diese Werthe von V_0 und V_1 in die Gleichungen (15), um sie auf die genannten speciellen Formen zurückzuführen, so findet man:

$$l_1 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \lambda_1)}{\nu_1(\mu_0 - \lambda_1)}, \quad m_1 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \mu_1)}{\nu_1(\mu_0 - \mu_1)}, \quad l_2 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \lambda_2)}{\nu_1(\mu_0 - \lambda_2)}, \quad m_2 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \mu_2)}{\nu_1(\mu_0 - \mu_2)},$$

und wenn man diese Werthe in (18) einsetzt, erhält man die Gleichung:

$$(20) \ldots \quad (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \mu_1)(\mu_0 - \lambda_2)(\mu_0 - \mu_2) - (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \mu_2)(\mu_0 - \lambda_1)(\mu_0 - \mu_1) = 0,$$

die Bedingungsgleichung für die Involution von drei Linienpaaren (15) in einer von der Gleichung (16) ganz verschiedenen Form.

Um auf andere Formen für dieselbe Bedingung der Involution zu kommen, gehen wir auf die ursprüngliche Definition der Involution von drei Linienpaaren zurück.

Nach derselben stellen die drei Gleichungenpaare:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = 0$$
$$V_0 + \lambda_0 V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda_1 V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda_2 V_1 = 0$$

irgend drei Linienpaare der Involution dar, und $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ dasjenige Linienpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei Paare.

Digitized by Google

Man kann die Gleichungen von drei Linienpaaren der Involution immer auf diese Form zurückführen, jedoch nicht ohne eine quadratische Gleichung zu lösen. Denn es verlangt die Zurückführung die Kenntniss des Linienpaares, welches harmonisch ist zu zwei von den drei Linienpaaren der Involution, und dieses Linienpaar wird, wie wir gesehen haben, durch Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt.

An Stelle der zwei Symbole V_0, V_1, durch welche jene sechs Gleichungen ausgedrückt sind, wählen wir drei Symbole U_0, U_1, U_2, welche wir durch die Gleichungen definiren:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0} \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1}.$$

Alsdann hat man die identische Gleichung:

$$U_0 + U_1 + U_2 \equiv 0$$

und jene sechs Gleichungen gehen, wenn man symmetrisch die zwei Symbole durch die drei Symbole ersetzt, über in:

$$\begin{array}{lll} U_0 = 0 & U_1 = 0 & U_2 = 0 \\ \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 & \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = 0 & \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0, \end{array}$$

indem μ_0 μ_1 μ_2 die Ausdrücke bezeichnen:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0 \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1 \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2.$$

Da die drei Grössen μ eben so willkürlich sind als die drei Grössen λ, aus welchen sie zusammengesetzt sind, so werden die transformirten sechs Gleichungen mit den willkürlichen Factoren μ — unter Voraussetzung der identischen Gleichung, welche ausdrückt, dass die drei geraden Linien $U_0 = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, unter welcher Voraussetzung auch die anderen drei geraden Linien durch denselben Punkt gehen — irgend drei Linienpaare der Involution darstellen.

Wenn wir endlich für die Gleichungen der geraden Linien $U_0 = 0$ $U_1 = 0$ $U_2 = 0$ ihre Normalformen einführen, indem wir setzen: $\varrho_0 U_0 = A_0$ $\varrho_1 U_1 = A_1$ $\varrho_2 U_2 = A_2$, so geht die identische Gleichung über in:

$$\frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} \equiv 0$$

Digitized by Google

und die transformirten Gleichungen der drei Linienpaare der Involution nehmen die Gestalt an:

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0$$
$$\frac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} - \frac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} = 0 \qquad \frac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} - \frac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} = 0 \qquad \frac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} - \frac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} = 0.$$

Bezeichnen wir nun die drei Linienpaare respective mit $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und erinnern uns nach (4) der geometrischen Bedeutung der Grössen:

$$\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2} = \frac{\sin (B_0 A_1)}{\sin (B_0 A_2)}, \quad \frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_0 \varrho_0} = \frac{\sin (B_1 A_2)}{\sin (B_1 A_0)}, \quad \frac{\mu_0 \varrho_0}{\mu_1 \varrho_1} = \frac{\sin (B_2 A_0)}{\sin (B_2 A_1)},$$

so erhalten wir durch Multiplication dieser drei Gleichungen:

$$(21) \ldots\ldots 1 = \frac{\sin (B_0 A_1) \cdot \sin (B_1 A_2) \cdot \sin (B_2 A_0)}{\sin (B_0 A_2) \cdot \sin (B_1 A_0) \cdot \sin (B_2 A_1)}.$$

Es ist dieses wieder die geometrische Bedingungsgleichung für drei Linienpaare $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ der Involution, welche man ebenfalls als Definition derselben aufstellen kann. Sie muss sich daher auch direct aus der Gleichung (19) ableiten lassen.

Wir erwähnen noch dreier Gleichungen, welche man aus der Gleichung (21) erhält, wenn man in derselben A_0 mit B_0 oder A_1 mit B_1 oder A_2 mit B_2 vertauscht. Da jede von diesen drei Gleichungen als Definition der drei Linienpaare einer Involution genommen werden kann, so muss sich auch jede derselben aus der Gleichung (18) direct ableiten lassen.

Durch zwei gegebene Paare von demselben Punkte ausgehender Linien ist das Linienpaar nicht bestimmt, welches mit den gegebenen eine Involution bildet. Es bedarf dazu noch zweier gegebenen Linienpaare, wie die Auflösung der folgenden Aufgabe beweiset.

Dasjenige Linienpaar zu bestimmen, welches eine Involution bildet mit zwei gegebenen Linienpaaren und zugleich eine Involution mit zwei anderen gegebenen Linienpaaren, welche alle von demselben Punkte ausgehen.

Die Bedingung, dass die drei Linienpaare (15) eine Involution bilden, ist die Gleichung (16), welche durch Entwickelung die Form erhält:

$$\lambda_0 \mu_0 - (\lambda_0 + \mu_0) P + Q = 0,$$

indem die Coefficienten P und Q allein von den beiden letzten

Digitized by Google

Linienpaaren abhängen, die wir als gegeben betrachten wollen. Soll nun das erste Linienpaar (15) noch mit zwei anderen gegebenen Linienpaaren eine Involution bilden, so haben die Grössen $\lambda_0 \mu_0$ und $\lambda_0 + \mu_0$ einer zweiten linearen Bedingungsgleichung zu genügen. Wenn man nun durch Auflösung der beiden linearen Gleichungen erhält:

$$\lambda_0 \mu_0 = b \text{ und } \lambda_0 + \mu_0 = a$$

so ist:

$$z^2 - az + b = 0$$

die quadratische Gleichung, deren Wurzeln λ_0 und μ_0 sind. Wir können daher sagen:

(22) . . . Es giebt immer nur ein bestimmtes Linienpaar, welches eine Involution bildet mit zwei gegebenen Linienpaaren und zugleich mit zwei anderen gegebenen Linienpaaren, wenn alle Linien von einem und demselben Punkte ausgehen.

In diesem Theile der Vorlesung haben wir vorzugsweise die Bedingungen discutirt für zwei harmonische Linienpaare und für drei Linienpaare, welche eine Involution bilden. Eine klare Anschauung solcher Linienpaare wurde damit nicht erreicht. Wir werden deshalb in dem zweiten Theile der Vorlesung solche Sätze entwickeln, welche lehren, harmonische Linienpaare und Linienpaare der Involution linear zu construiren, das heisst durch blosses Ziehen von geraden Linien.

Die vorgetragenen Principien reichen aus, um die in dem zweiten Theile der vorhergehenden Vorlesung gegebenen Sätze weiter auszudehnen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke wieder ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten 0 1 2 durch ihre Gleichungen in der Normalform gegeben sein sollen:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0.$$

Ein beliebiger Punkt P — er liege der Einfachheit wegen in dem Dreiecke, in welchem auch der Coordinatenanfangspunkt liegen soll — sei durch seine senkrechten Abstände a_0 a_1 a_2 von den Seiten des Dreiecks gegeben.

Digitized by Google

Alsdann sind:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_0}{a_0} = 0 \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$$

die Gleichungen von drei geraden Linien, welche sämmtlich durch den Punkt P gehen. Denn die Coordinaten dieses Punktes genügen jeder dieser Gleichungen, weil die Ausdrücke A_0 A_1 A_2 durch Einsetzen der Coordinaten des Punktes P die Werthe annehmen $-a_0$ $-a_1$ $-a_2$. Nach der Zusammensetzung ihrer Gleichungen gehen die, durch die letzten drei Gleichungen repräsentirten, geraden Linien einzeln durch die Ecken des Dreiecks.

Da die drei Ecken des Dreiecks, gleich wie der Punkt P, beliebig gewählt werden können, so ist es erlaubt zu sagen, dass die angegebenen sechs Gleichungen die drei Linienpaare analytisch darstellen, von welchen jedes durch irgend vier gegebene Punkte hindurchgeht. Wenn wir die drei letzten geraden Linien bezeichnen respective mit B_0 B_1 B_2, so sind es die Linienpaare A_0 B_0, A_1 B_1, A_2 B_2, welche wir im Auge haben.

Entnehmen wir aus (4) die geometrische Bedeutung von

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin(B_0 A_1)}{\sin(B_0 A_2)}, \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{\sin(B_1 A_2)}{\sin(B_1 A_0)}, \quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{\sin(B_2 A_0)}{\sin(B_2 A_1)}$$

aus den drei letzten Gleichungen und multipliciren die eben gegebenen Gleichungen, so erhalten wir gerade die Gleichung (21).

Das will sagen, dass drei Linienpaare, welche irgend welche vier Punkte paarweise verbinden, Winkel mit einander bilden, wie die Bedingung der Involution es verlangt. Man hat daher den Satz:

Wenn man von einem beliebigen Punkte drei Linienpaare zieht, welche parallel sind dreien Linienpaaren, die irgend vier Punkte paarweise verbinden, so bilden die drei gezogenen Linienpaare eine Involution.

Hiernach kann man, wenn von drei Linienpaaren der Involution A^0 B^0, A^1 B^1, A^2 B^2 die fünf ersten gegeben sind, die sechste Linie B^2 der Involution in folgender Art construiren.

Man construire ein Dreieck, dessen Grundlinie A_2 parallel ist der gegebenen Linie A^2 und dessen beide andere Seiten A_0, B_0 parallel sind den gegebenen Linien A^0, B^0. Durch den einen Endpunkt der Grundlinie ziehe man eine Linie A_1 parallel A^1 und durch den anderen Endpunkt der Grundlinie eine zweite

Digitized by Google

Linie B_1 parallel B^1. Alsdann sind $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ die gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks, dessen eine Diagonale A_2 ist. Construirt man die andere Diagonale B_2, so giebt diese die Richtung an für die zu construirende Linie B^2.

Wir legen auf diese Construction keinen Werth, weil sie nicht linear genannt werden kann. Denn parallele Linien kann man nicht construiren, ohne den Kreis zu Hülfe zu nehmen. Die lineare Construction der sechsten Linie der Involution behalten wir uns vor auf das Ende der Vorlesung. —

Kehren wir zu unserer Figur zurück, so sehen wir, dass in jeder Ecke des betrachteten Dreiecks drei von den sechs geraden Linien sich schneiden, deren Gleichungen wir aufgestellt haben. Die Gleichungen der vierten harmonischen Linien sind:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0} = 0 \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = 0.$$

Durch Combination der linken Theile der sechs letzten Gleichungen erhält man identische Gleichungen von der Art:

$$\left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) - \left(\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0}\right) + \left(\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1}\right) \equiv 0.$$

Diese identische Gleichung beweiset den Satz:

Wenn man von einem beliebigen Punkte nach den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht und in zwei Ecken die vierten harmonischen Linien construirt, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, durch welchen auch die durch den beliebigen Punkt und die dritte Ecke des Dreiecks gelegte gerade Linie geht.

Die geometrische Deutung der folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ -\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} &= 0 \end{aligned}$$

in der Weise wie in der vorhergehenden Vorlesung, wo $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ war, führt auf die beiden Sätze:

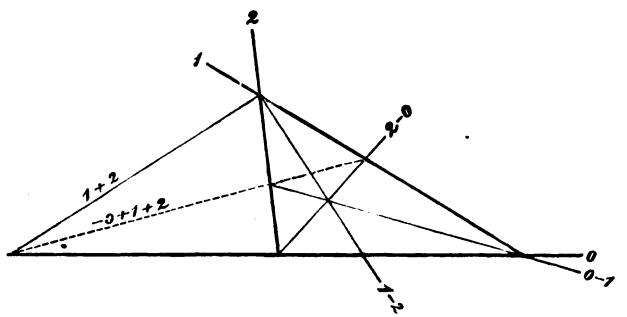
Digitized by Google

Wenn man von irgend einem Punkte nach den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht und in jeder Ecke die vierte harmonische Linie construirt, so schneiden die letzteren die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, die auf einer und derselben geraden Linie liegen.

Wenn man von irgend einem Punkte nach den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht, und in einer Ecke die vierte harmonische Linie construirt, so schneidet letztere die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in einem Punkte. Dieser Punkt und die beiden Punkte, in welchen die von dem beliebigen Punkte nach den beiden anderen Ecken des Dreiecks gezogenen geraden Linien die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks schneiden, liegen auf einer und derselben geraden Linie.

Diesen letztern Satz, der zugleich lehrt, zu drei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien die vierte harmonische Linie linear zu construiren, wollen wir noch besonders durch eine Figur erläutern.

Fig. 6.



Man erblickt in der Figur das von den drei geraden Linien 0, 1, 2 gebildete Dreieck. Die von dem beliebigen Punkte P nach den Ecken des Dreiecks gezogenen Linien sind analog ihren Gleichungen bezeichnet mit $1 - 2$, $2 - 0$, $0 - 1$, indem die Zahlen die Symbole vertreten. Die von der einen Ecke des Dreiecks gezogene vierte harmonische Linie ist symbolisch bezeichnet mit $1 + 2$. Da nun das Symbol $- 0 + 1 + 2$ der

Digitized by Google

punktirten geraden Linie aus den Symbolenpaaren 0, 1 + 2 oder 2, 0 — 1 oder 1, 2 — 0 zusammengesetzt ist, so erkennt man darin den Beweis, dass die punktirte gerade Linie durch die Schnittpunkte der den Symbolenpaaren entsprechenden Linienpaare geht.

Auf diesen Satz gestützt werden wir nun die Aufgabe lösen:

Wenn von zwei harmonischen Linienpaaren drei Linien gegeben sind, die vierte harmonische Linie zu construiren.

Die drei gegebenen geraden Linien seien in der Figur die Linien 1, 2, 1 — 2. Die beiden ersten sollen das erste gegebene Linienpaar darstellen. Von dem zweiten Linienpaare sei die eine 1 — 2 gegeben, die ihr zugehörige harmonische Linie 1 + 2 soll construirt werden.

Wir ziehen zu diesem Zwecke irgend eine gerade Linie 0. Die Schnittpunkte derselben mit den gegebenen Linien 1 und 2 verbinden wir mit einem beliebig auf der gegebenen Linie 1 — 2 angenommenen Punkte durch die geraden Linien 0 — 1, 2 — 0. Diese schneiden die gegebenen Linien 1 und 2 respective in zwei Punkten, durch welche wir wieder eine gerade Linie gehen lassen. Wenn wir den Schnittpunkt dieser geraden Linie und der geraden Linie 0 verbinden durch eine gerade Linie 1 + 2 mit dem Schnittpunkte der gegebenen Linien 1 und 2, so wird die genannte gerade Linie 1 + 2 die gesuchte vierte harmonische Linie sein.

Die sechs Schnittpunkte von irgend vier gegebenen geraden Linien 0 1 2 3 paaren sich drei mal in der Weise, dass durch jedes der drei Paare (03)(12), (13)(20), (23)(01) alle vier gegebenen Linien gehen. Die durch ihre Gleichungen:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0$$

gegebenen geraden Linien 0 1 2 3 werden wir nun in Verbindung bringen mit einem beliebigen Punkte P, wie vorhin die Seiten eines Dreiecks mit einem beliebig gegebenen Punkte.

Bezeichnen u_0, u_1 ... die Werthe, welche die Ausdrücke U_0, U_1 ... annehmen, wenn man in letzteren für die laufenden Coordinaten die Coordinaten des gegebenen Punktes P setzt, so sind:

Digitized by Google

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = 0$$
$$\frac{U_1}{u_1} - \frac{U_2}{u_2} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_0}{u_0} = 0 \quad \frac{U_0}{u_0} - \frac{U_1}{u_1} = 0$$

die Gleichungen der drei vom Punkte P ausgehenden Linienpaare, welche nach den drei Schnittpunktenpaaren der gegebenen vier Linien gezogen sind. Setzen wir, um die drei ersten Gleichungen durch Multiplication mit den Factoren $\mu_0\varrho_0$, $\mu_1\varrho_1$, $\mu_2\varrho_2$ auf die Normalform zurückzuführen,

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_0}{\varrho_0\mu_0}, \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_1}{\varrho_1\mu_1}, \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_2}{\varrho_2\mu_2}$$

und drücken jene drei Gleichungenpaare durch die Symbole A aus, so erhalten wir:

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0$$
$$\frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} - \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} = 0 \quad \frac{A_2}{\mu_2\varrho_2} - \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} = 0 \quad \frac{A_0}{\mu_0\varrho_0} - \frac{A_1}{\mu_1\varrho_1} = 0,$$

welches gerade dieselben Gleichungen sind, aus welchen die Gleichung (21), die Bedingungsgleichung für die Involution von drei Linienpaaren, hervorging. Es beweiset dieses den Satz:

Wenn man von einem beliebigen Punkte nach den drei Schnittpunktepaaren von irgend vier geraden Linien drei Linienpaare zieht, so bilden die drei Linienpaare eine Involution.

Dieser Satz ist wichtig, weil er lehrt die Aufgabe lösen:

Wenn von drei von einem und demselben Punkte ausgehenden Linienpaaren der Involution fünf Linien gegeben sind, die sechste Linie linear zu construiren.

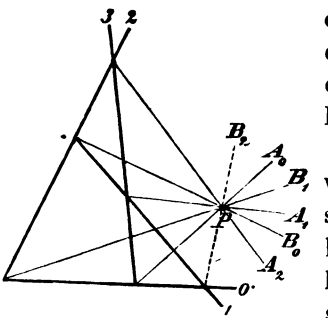
Sind von den, vom Punkte P ausgehenden, drei Linienpaaren A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 der Involution die fünf ersten Linien gegeben, so construiren wir die sechste Linie B_2 der Involution, indem wir irgend eine gerade Linie 1 ziehen.

Jeden von den Schnittpunkten dieser Linie 1 mit den beiden Linien B_0 und A_1, nämlich die Schnittpunkte $(1B_0)$ und $(1A_1)$, verbinden wir durch eine gerade Linie mit einem beliebig

Digitized by Google

auf der Linie A_2 angenommenen Punkte. Diese geraden Linien seien respective 2 und 3. Verbinden wir alsdann die Schnittpunkte $(2B_1)$ und $(3A_0)$ durch eine gerade Linie 0, so schneiden sich die geraden Linien 0 und 1 in einem Punkte der gesuchten Linie, den man nur mit dem Punkte P durch eine gerade Linie zu verbinden braucht, um die gesuchte sechste Linie B_2 der Involution zu erhalten.

Fig. 7.



Wir specialisiren den Satz, aus welchem wir diese Construction geschöpft haben, wenn wir den beliebig angenommenen Punkt P verlegen in den Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten sind 0, 1 und 2, 3. In dieser Voraussetzung fallen die Linien A_0 mit B_0 und A_1 mit B_1 zusammen und bilden nur ein Linienpaar, welches nach einem bereits angegebenen Satze harmonisch ist zu dem übrigbleibenden dritten Linienpaare $A_2 B_2$. Dieses drücken wir kürzer so aus:

Wenn man den Schnittpunkt der Diagonalen eines Vierecks durch ein Linienpaar verbindet mit den beiden Schnittpunkten der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, so ist dieses Linienpaar harmonisch zu dem Diagonalenpaar.

Dieser Satz ist im Grunde nur ein anderer Ausdruck für den Satz, aus welchem die Construction der vierten harmonischen Linie abgeleitet wurde.

Kehren wir jedoch wieder zu unserer Figur zurück, deren analytische Ausdrücke wir vorausgeschickt haben, so sehen wir, dass in jedem der sechs Schnittpunkte der vier geraden Linien 0 1 2 3, von welchen wir ausgingen, drei Linien zusammenstossen. Die sechs vierten harmonischen Linien zu diesen paaren sich wie die sechs Schnittpunkte und ihre Gleichungenpaare sind:

$$\frac{U_0}{u_0} + \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_1}{u_1} + \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_3}{u_3} = 0$$
$$\frac{U_1}{u_1} + \frac{U_2}{u_2} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_0}{u_0} = 0 \quad \frac{U_0}{u_0} + \frac{U_1}{u_1} = 0.$$

Digitized by Google

Bemerken wir nun, dass aus jedem dieser Gleichungenpaare durch Addition die Gleichung:

$$\frac{U_0}{u_0} + \frac{U_1}{u_1} + \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_3}{u_3} = 0$$

derselben geraden Linie entsteht, so haben wir nach (13) der zweiten Vorlesung durch diese Bemerkung den Satz bewiesen:

Wenn man von einem beliebigen Punkte nach den drei Schnittpunktepaaren von vier geraden Linien drei Linienpaare zieht, in jedem der sechs Schnittpunkte der vier geraden Linien die vierte harmonische Linie construirt, so schneiden sich die construirten sechs Linien paarweise in drei Punkten, die auf einer und derselben geraden Linie liegen.

Vierte Vorlesung.

Der Punkt.

Zwei in Rücksicht auf die variabeln Coordinaten x, y lineare Gleichungen:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0$$

stellen, wie wir gesehen haben, einen Punkt dar, den Schnittpunkt der geraden Linien, welche jene Gleichungen einzeln analytisch ausdrücken. Mit dem Punkte sind aber umgekehrt die ihn bestimmenden Gleichungen nicht gegeben. Es können vielmehr irgend zwei aus der Schaar Gleichungen:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ an Stelle der beiden ersten Gleichungen gewählt werden.

Diese Unbestimmtheit in der Wahl verschwindet, wenn man sich den Punkt nicht durch den Schnitt zweier geraden Linien bestimmt denkt, sondern aller geraden Linien, welche durch ihn gehen. Mit dieser Art der Bestimmung eines Punktes werden

Digitized by Google

wir den Vortheil verbinden, dass wir den Punkt durch eine einzige Gleichung analytisch darstellen, während zwei solcher Gleichungen eine gerade Linie ausdrücken.

Wie die Lage eines Punktes in der Ebene durch zwei Grössen, seine Coordinaten, unzweideutig bestimmt ist, so kann man auch die Lage einer beliebigen geraden Linie durch zwei Grössen ausdrücken. Ist nämlich die Gleichung irgend einer geraden Linie:

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad ux + vy + 1 = 0$$

gegeben, auf welche Form sich die Gleichung jeder geraden Linie zurückführen lässt, so sieht man, dass die Lage dieser Linie allein abhängt von den Werthen der beiden Constanten u und v, welche linear in die Gleichung eingehen.

Weil diese Constanten die Lage der geraden Linie unzweideutig bestimmen, und umgekehrt die Lage der geraden Linie die Constanten unzweideutig bestimmt, werden wir sie die Coordinaten der geraden Linie nennen oder Liniencoordinaten zum Unterschiede von den, einen Punkt bestimmenden, Punktcoordinaten. Sie drücken analytisch die negativen reciproken Abschnitte aus, welche die gerade Linie auf den Coordinatenaxen macht.

Wenn die variabeln Coordinaten u, v irgend einer geraden Linie die Werthe annehmen:

$$u = a \quad v = b,$$

so liegt eine bestimmte gerade Linie vor. Diese, die gerade Linie bestimmenden, Gleichungen sind die Gleichungen der geraden Linie in Liniencoordinaten und $-\frac{1}{a}$ und $-\frac{1}{b}$ die Abschnitte, welche die gerade Linie auf den Coordinatenaxen macht.

Nehmen wir aber nur die erste von den angegebenen Gleichungen und fragen, welche Eigenschaften alle geraden Linien haben, deren Coordinaten u, v jener Gleichung genügen, so zeigt es sich, dass diese Linien durch denjenigen Punkt der x Axe gehen, welcher von dem Coordinaten-Anfangspunkt um $-\frac{1}{a}$ absteht, und dass auch die Coordinaten jeder geraden Linie, welche durch den genannten Punkt geht, jener Gleichung genügen. Des-

Digitized by Google

halb nennen wir jene Gleichung die Gleichung des bezeichneten Punktes der x Axe.

Hiernach stellt jede der angegebenen Gleichungen für sich einen Punkt respective der x Axe oder der y Axe dar, und beide Gleichungen die gerade Linie, welche die genannten Punkte verbindet.

Jede von den angegebenen Gleichungen ist linear, aber von specieller Form, denn die allgemeinste lineare Gleichung zwischen den Liniencoordinaten ist:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad Au + Bv + C = 0.$$

Es erhebt sich nun die Frage nach der geometrischen Bedeutung dieser Gleichung, das heisst, die Frage nach den Eigenschaften aller geraden Linien (1), deren Coordinaten u, v der Gleichung (2) genügen.

Die analoge Frage nach den Eigenschaften der Punkte, deren Coordinaten einer gegebenen linearen Bedingungsgleichung genügen, haben wir bereits in der ersten Vorlesung in Anregung gebracht und sie in der zweiten Vorlesung dahin beantwortet, dass die Punkte sämmtlich auf einer geraden Linie liegen. Wir nannten dort die lineare Bedingungsgleichung die Gleichung der geraden Linie.

Es wird sich zeigen, dass alle geraden Linien, deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen, durch einen bestimmten Punkt gehen. Wenn nun im ersten Falle die gegebene, in Punktcoordinaten lineare, Gleichung die Gleichung der geraden Linie genannt wurde, so verlangt die Analogie in dem vorliegenden Falle, dass man die gegebene, in Liniencoordinaten lineare, Gleichung (2) die Gleichung des Punktes nenne, durch welchen alle jene geraden Linien (1) gehen.

Um nachzuweisen, was wir eben vorausgesetzt haben, bemerken wir, dass in der Bedingungsgleichung (2) die Liniencoordinate u alle möglichen Werthe annehmen kann, dass aber der Werth von v durch sie bestimmt ist. Setzt man daher den Werth von v aus (2) in die Gleichung (1), so erhält man die Gleichung aller geraden Linien (1), deren Coordinaten der Gleichung (2) genügen in der Form:

$$3) \ldots\ldots \quad (Bx - Ay)\, u + (B - Cy) = 0$$

Digitized by Google

mit der willkürlichen Constante u. Diese Gleichung ist aber zusammengesetzt aus den Gleichungen der beiden geraden Linien:

$$Bx - Ay = 0 \quad B - Cy = 0.$$

Die geraden Linien (3) gehen also durch den Schnittpunkt der genannten geraden Linien, dessen Coordinaten sind:

(4) . . . . . $x = \frac{A}{C} \quad y = \frac{B}{C}$.

Wenn umgekehrt eine gerade Linie (1) durch diesen Schnittpunkt geht, so genügen die Coordinaten der geraden Linie der Gleichung (2), weil die Coordinaten (4) des Schnittpunktes in die Gleichung (1) gesetzt die Gleichung (1) in (2) übergehen machen.

Wir fassen dieses kurz zusammen in den Worten:

Die Gleichung eines Punktes ist eine lineare Gleichung zwischen den variabeln Liniencoordinaten. Die Coordinaten aller geraden Linien, welche durch den Punkt gehen, genügen der Gleichung, und wenn die Coordinaten einer geraden Linie der linearen Gleichung genügen, so geht die gerade Linie durch den Punkt.

Bemerken wir nun, dass die Gleichung (2) die Gleichung desjenigen Punktes ist, dessen Coordinaten in (4) ausgedrückt sind, so ergiebt sich hieraus eine Regel zur Bestimmung der Coordinaten eines durch seine Gleichung gegebenen Punktes, wie für die Bildung der Punktgleichung, wenn die Coordinaten des Punktes gegeben sind. Denn bringt man die gegebene Punktgleichung (2) durch Multiplication mit einem constanten Factor auf die Form, in welcher das ganz constante Glied gleich der Einheit ist, so sind die Coefficienten von u und v in der Gleichung die Coordinaten des Punktes. Multiplicirt man dagegen die gegebenen Coordinaten eines Punktes respective mit u und v und setzt die Summe der Produkte zur Einheit addirt gleich 0, so hat man die Gleichung des Punktes.

Wenn man die Liniencoordinaten aus zwei Punktgleichungen berechnet, so erhält man die Coordinaten derjenigen geraden Linie, welche die beiden Punkte mit einander verbindet. Zwei Punktgleichungen sind demnach die Gleichungen einer geraden Linie in Liniencoordinaten, wie zwei Liniengleichungen in Punktcoordinaten die Gleichungen eines Punktes sind.

Digitized by Google

Wir unterscheiden die allgemeine Form (2) der Gleichung eines Punktes von der Normalform der Gleichung des Punktes:

(5) . . . . . $au + bv + 1 = 0,$

in welcher letzteren Form die Coordinaten des Punktes sich unmittelbar als die Coefficienten der Liniencoordinaten darstellen. Mit der Normalform der Punktgleichung lässt sich in vielen Fällen geschickter operiren als mit der allgemeinen Form, wie zum Beispiel bei Auflösung der Aufgabe:

Wenn die Coordinaten U, V einer geraden Linie und die Gleichung eines Punktes in der Normalform (5) gegeben sind, den senkrechten Abstand des Punktes von der geraden Linie zu bestimmen.

Wenn (5) die gegebene Gleichung des Punktes ist, so sind a und b die Coordinaten des Punktes und:

$$\frac{Ux + Vy + 1}{-\sqrt{(U^2 + V^2)}} = 0$$

die Gleichung der gegebenen geraden Linie in der Normalform. Nach der Regel (6) der zweiten Vorlesung wird also der gesuchte senkrechte Abstand sein:

$$\frac{Ua + Vb + 1}{\sqrt{(U^2 + V^2)}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (5), so ergiebt sich daraus folgende Regel:

(6) . . . Wenn man den linken Theil einer in der Normalform gegebenen Gleichung eines Punktes durch $\sqrt{(u^2 + v^2)}$ dividirt, so drückt der Quotient den senkrechten Abstand des Punktes aus von der durch ihre Coordinaten u, v gegebenen geraden Linie.

Zum Zwecke der Darstellung mehrerer Punkte werden wir die Symbole U und A brauchen für die Ausdrücke:

(7) . . . . . $U \equiv Au + Bv + C$

(8) . . . . . $A \equiv au + bv + 1$

und mit U_0 U_1 . . . und A_0 A_1 . . . dieselben Ausdrücke als U

Digitized by Google

und A, jedoch mit veränderten Werthen der Coefficienten bezeichnen.

Auf diese Weise drücken die Gleichungen in der allgemeinen Form:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \ldots.$$

oder in der Normalform:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \ldots.$$

irgend ein System von beliebig vielen Punkten aus.

Haben wir nur zwei durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebene Punkte:

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad A = 0 \quad A_1 = 0,$$

so werden die senkrechten Abstände derselben von einer durch ihre Coordinaten u, v gegebenen geraden Linie l ausgedrückt durch:

$$\frac{A}{\sqrt{(u^2+v^2)}} \quad \frac{A_1}{\sqrt{(u^2+v^2)}}.$$

Die Bedingung, dass diese Abstände einander gleich seien:

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A - A_1 = 0$$

verlangt, dass die gerade Linie l parallel gehe mit der Verbindungslinie der gegebenen Punkte, dass sie letztere in dem Punkte schneide, der im Unendlichen liegt. Die Gleichung selbst stellt aber einen Punkt dar, durch welchen alle jene mit der Verbindungslinie parallelen Linien gehen. Es ist dieses also der Punkt der Verbindungslinie, welcher auf ihr im Unendlichen liegt. Und in der That finden wir, wenn wir nach den gegebenen Regeln von der Gleichung (10) des Punktes zu den Coordinaten desselben übergehen, dass sich dieselben als unendlich grosse Grössen darstellen.

Die Bedingung:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A + A_1 = 0,$$

dass die senkrechten Abstände der gegebenen beiden Punkte von der geraden Linie l gleich, aber entgegengesetzt seien, ist wieder die Gleichung eines Punktes. Dieser Punkt kann kein anderer als der Mittelpunkt der Verbindungslinie sein, weil nur diejenigen geraden Linien l von den gegebenen beiden Punkten in entgegengesetzter Richtung gleich weit abstehen, welche durch jenen Punkt gehen.

Digitized by Google

Wir können demnach sagen:

(12) . . . Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier gegebenen Punkte in der Normalform sind, so sind $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte, von welchen der erste im Unendlichen liegt, der andere die Verbindungslinie halbirt.

Die Gleichungen (10) und (11) der Punkte auf der geraden Linie, welche die durch ihre Gleichungen (9) gegebenen Punkte verbindet, sind linear zusammengesetzt aus den gegebenen Gleichungen (9). Es liegt aber auch jeder Punkt auf der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte, dessen Gleichung linear aus den Gleichungen der gegebenen Punkte zusammengesetzt ist.

Denn es seien:

$$U = 0 \quad U_1 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Punkte und

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 = 0$$

die aus ihnen linear zusammengesetzte Gleichung eines dritten Punktes. Dass dieser Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegt, folgt aus der Betrachtung.

Die Coordinaten der Verbindungslinie der gegebenen Punkte genügen jeder von den Gleichungen der gegebenen Punkte, sie genügen deshalb auch der Gleichung des dritten Punktes, der deshalb auf ihr liegt. Wir haben damit den Satz bewiesen, der unter Umständen leicht erkennen lässt, dass gewisse drei Punkte in einer geraden Linie liegen:

(13) . . . Wenn zwischen den Gleichungen von drei Punkten $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Identität stattfindet:

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0,$$

so liegen die drei Punkte auf einer und derselben geraden Linie.

Wir bemerken, dass jene dritte Gleichung mit den willkürlichen Constanten λ λ_1 jeden Punkt auf der Verbindungslinie der gegebenen beiden Punkte darstellt. Denn es lassen sich diese

Digitized by Google

Constanten immer so bestimmen, dass der Gleichung auch genügt wird, wenn man für die variabeln Coordinaten u, v die Coordinaten einer ganz bestimmten geraden Linie setzt. Diese Bestimmung entspricht demjenigen Punkte der Verbindungslinie, in welchem die bestimmte Linie die Verbindungslinie trifft. Wir können daher auch den Satz umkehren:

(14) . . . Wenn $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen von drei Punkten auf einer geraden Linie sind, so kann man immer drei Factoren $\lambda\,\lambda_1\,\lambda_2$ der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0.$$

Betrachten wir nun drei durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebene Punkte:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0$$

als die Ecken eines Dreiecks, so haben wir die Gleichungen der auf den Seiten des Dreiecks im Unendlichen liegenden Punkte:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad A_2 - A_0 = 0 \quad A_0 - A_1 = 0.$$

Ihre Summe

$$(A_1 - A_2) + (A_2 - A_0) + (A_0 - A_1) \equiv 0$$

verschwindet identisch. Man wird deshalb nach Satz (13) irgend drei Punkte im Unendlichen als auf einer geraden Linie liegend zu betrachten haben. In der That rücken auch alle drei Schnittpunkte einer geraden Linie und der Seiten des Dreiecks in das Unendliche, wenn zwei Schnittpunkte auf den Seiten des Dreiecks in das Unendliche verlegt werden.

Combiniren wir die Gleichungen der Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad A_2 + A_0 = 0 \quad A_0 + A_1 = 0$$

mit den Gleichungen jener drei Punkte im Unendlichen, so ergeben sich daraus die identischen Gleichungen:

$$(A_2 + A_0) - (A_0 + A_1) + (A_1 - A_2) \equiv 0$$
$$(A_0 + A_1) - (A_1 + A_2) + (A_2 - A_0) \equiv 0$$
$$(A_1 + A_2) - (A_2 + A_0) + (A_0 - A_1) \equiv 0.$$

Diese Gleichungen beweisen, dass die Verbindungslinie der Mitten zweier Seiten des Dreiecks die dritte Seite im Unendlichen schneidet, das heisst, mit ihr parallel ist.

Digitized by Google

Wenn wir die Zusammensetzung der drei Punktgleichungen in das Auge fassen:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 0 \\ -A_0 + A_1 + A_2 &= 0 \\ A_0 - A_1 + A_2 &= 0 \\ A_0 + A_1 - A_2 &= 0, \end{aligned}$$

so können wir auf Grund von (13) aus der ersten Gleichung unmittelbar den Satz ablesen:

Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Die drei anderen Punktgleichungen beweisen, dass in einem Parallelogramm die Diagonalen sich halbiren.

Fünfte Vorlesung.

Harmonische Punkte. Punkte der Involution.

Wenn die Gleichungen zweier Punkte 0 und 1 in der Normalform gegeben sind:

(1) . . . . . $A_0 = 0 \quad A_1 = 0,$

und wenn u, v die Coordinaten irgend einer geraden Linie l vorstellen, so genügen letztere den gegebenen Gleichungen nicht, vielmehr verhalten sich nach (6) der vorhergehenden Vorlesung $A_0 : A_1$ wie die senkrechten Abstände der gegebenen Punkte von der geraden Linie l.

Sollen die genannten senkrechten Abstände sich wie zwei gegebene Grössen $a_0 : a_1$ verhalten, so haben wir als Bedingung:

(2) . . . . . $\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$

die Gleichung eines Punktes, durch welchen alle geraden Linien gehen, deren senkrechte Abstände von den gegebenen beiden Punkten sich wie $a_0 : a_1$ verhalten.

Digitized by Google

Die geometrische Anschauung lehrt, dass alle jene Linien durch einen und denselben Punkt auf der durch die gegebenen Punkte gelegten geraden Linie gehen, dessen Abstände von den gegebenen Punkten sich ebenfalls wie $a_0 : a_1$ verhalten. Es ist die Gleichung (2) deshalb die Gleichung des eben genannten Punktes.

Setzen wir $\lambda = \frac{a_0}{a_1}$, so stellt die Gleichung:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ jeden beliebigen Punkt 2 auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte dar. Derselbe liegt zwischen den gegebenen Punkten, wenn λ negativ ist, im anderen Falle liegt er ausserhalb. Er fällt mit einem der gegebenen Punkte zusammen, wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ wird.

Die geometrische Bedeutung des Factors λ in der Gleichung (3) ist nach dem Vorhergehenden

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \lambda = \frac{(20)}{(21)}.$$

Ein beliebiger anderer Punkt 3 auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte hat zur Gleichung:

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 - \mu A_1 = 0.$$

Das Verhältniss:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(20)}{(21)} : \frac{(30)}{(31)}$$

heisst das anharmonische Verhältniss des Punktepaares 2, 3 zu dem gegebenen Punktepaare 0, 1.

Sind zwei Punktepaare auf einer geraden Linie durch ihre Gleichungen in der Form gegeben:

$$(7) \ldots \quad V_0 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_0 - lV_1 = 0 \quad V_0 - mV_1 = 0,$$

so ist das anharmonische Verhältniss derselben:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{l}{m}.$$

Man überzeugt sich davon, wenn man die gegebenen Gleichungen (7) durch Multiplication mit Factoren auf die Formen (1), (3), (5) zurückführt.

Digitized by Google

Wir stellen uns nun die allgemeinere Aufgabe:

Gegeben sind die Gleichungen von vier Punkten auf einer geraden Linie:

(9) . $U_0 - \lambda U_1 = 0 \quad U_0 - \mu U_1 = 0 \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0 \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0;$

das anharmonische Verhältniss des letzten Punktepaares zu dem ersten zu bestimmen.

Setzen wir $U_0 - \lambda U_1 = V_0 \quad U_0 - \mu U_1 = V_1$ und drücken in den Gleichungen (9) U_0 und U_1 durch V_0 und V_1 aus, so nehmen jene Gleichungen die Gestalt der Gleichungen (7) an. Das gesuchte anharmonische Verhältniss $\frac{l}{m}$ dort wird hier:

(10) . . . . . $\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1}.$

Wenn das anharmonische Verhältniss den Werth -1 annimmt, so nennt man es ein harmonisches Verhältniss und die beiden Punktepaare auf einer geraden Linie heissen harmonische Punktepaare.

Nach dieser Definition werden zwei harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie analytisch ausgedrückt durch die Gleichungen:

(11) . . . $V_0 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda V_1 = 0,$

und die Bedingung, unter welcher zwei Punktepaare (9) auf einer geraden Linie harmonisch sind:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} + \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1} = 0$$

giebt entwickelt:

(12) . . . $\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$

Die geometrische Bedingung für zwei harmonische Punktepaare geht aus (6) hervor:

(13) . . . . . $\frac{(20)}{(21)} + \frac{(30)}{(31)} = 0.$

Diese Bedingungsgleichung hat man zu discutiren, um eine Vorstellung von der Lage zweier harmonischen Punktepaare zu erhalten. Aus ihr kann man ersehen, dass, wenn der Punkt 2 die Linie 0 1 halbirt, der Punkt 3 im Unendlichen auf der Linie

Digitized by Google

liegen muss. Wenn der Punkt 2 aus dieser Lage sich einem der Punkte 0, 1 nähert, so nähert sich der Punkt 3 demselben Punkte ausserhalb von 0 und 1. In dem Grenzfalle fallen die sich bewegenden Punkte 2 und 3 mit dem einen oder dem anderen festen Punkte 0 oder 1 zusammen.

Dasjenige Punktepaar zu bestimmen, welches harmonisch ist mit zwei gegebenen Punktepaaren auf einer geraden Linie.

Sind die Gleichungen der gegebenen Punktepaare:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0 \qquad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0$$
$$U_0 - \mu_0 U_1 = 0 \qquad U_0 - \mu_1 U_1 = 0$$

und die Gleichungen des gesuchten Punktepaares:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0$$
$$U_0 - \mu U_1 = 0,$$

so hat man nach (12) die Bedingungen:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0$$
$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Löset man diese in Rücksicht auf $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$ linearen Gleichungen auf, wodurch man erhalte $\lambda\mu = b$, $\lambda + \mu = a$, so ist:

$$z^2 - az + b = 0$$

die quadratische Gleichung, deren Wurzeln die gesuchten Grössen λ und μ sind. Zugleich können wir sagen:

(14) . . . **Es giebt immer nur ein bestimmtes Punktepaar, welches harmonisch ist mit zwei gegebenen Punktepaaren auf einer geraden Linie.**

Hat die quadratische Gleichung reelle Wurzeln, so ist das gesuchte Punktepaar reell, im anderen Falle imaginär.

Drei Punktepaare auf einer geraden Linie bilden eine Involution, wenn ein viertes Punktepaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist mit jedem der drei Punktepaare.

Aus dieser Definition der Involution folgt mit Rücksicht auf den Satz (14), dass von drei Punktepaaren der Involution fünf Punkte beliebig gewählt werden können, dass aber der sechste

Digitized by Google

Punkt unzweideutig bestimmt ist, wenn es feststeht, welche Punkte sich paaren sollen. Es wird daher eine Bedingungsgleichung für die Involution ausreichen.

Es sind die Gleichungen von drei Punktepaaren auf einer geraden Linie gegeben:

$$(15)\ \ldots \quad \begin{matrix} V_0 - \lambda_0 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_1 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_2 V_1 = 0 \\ V_0 - \mu_0 V_1 = 0 & V_0 - \mu_1 V_1 = 0 & V_0 - \mu_2 V_1 = 0; \end{matrix}$$

die Bedingung anzugeben, unter welcher die drei Punktepaare eine Involution bilden.

Wenn die drei Punktepaare eine Involution bilden, so hat man nach der Definition ein Punktepaar:

$$\begin{aligned} V_0 - \lambda V_1 &= 0 \\ V_0 - \mu V_1 &= 0, \end{aligned}$$

welches harmonisch ist mit jedem der gegebenen Punktepaare. Dieses verlangt nach (12) die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 &= 0 \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 &= 0 \\ \lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen durch Elimination von $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$, welche Grössen linear in die Gleichungen eingehen, die gesuchte Bedingungsgleichung der Involution hervorgeht:

$$(16)\quad (\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.$$

Im speciellen Falle kann das erste Punktepaar der Involution mit einem Punkte, das dritte wieder mit einem andern Punkte zusammenfallen. Dieses trifft zu, wenn $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda$ und $\lambda_2 = \mu_2 = \mu$ wird. Dadurch geht die Gleichung (16) über in (12) und wir haben den Satz:

(17) . . . Wenn von drei Punktepaaren der Involution das eine Punktepaar mit einem Punkte zusammenfällt, ein zweites Punktepaar mit einem zweiten Punkte, so ist das dritte Punktepaar der Involution harmonisch mit den beiden Punkten.

Digitized by Google

Die Involution von drei Punktepaaren lässt sich hiernach als ein allgemeiner Fall von harmonischen Punktepaaren betrachten, indem jeder Punkt eines Paares der letzteren sich in zwei Punkte zertheilt.

Jede drei Punktepaare auf einer geraden Linie stellen sich analytisch auch unter der Form dar:

$$A_0 = 0 \quad A_0 - l_1 A_1 = 0 \quad A_0 - l_2 A_1 = 0$$
$$A_1 = 0 \quad A_0 - m_1 A_1 = 0 \quad A_0 - m_2 A_1 = 0,$$

wo wir unter $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Normalformen der Gleichungen des ersten Punktepaares A_0, B_0 verstehen. Die Gleichungen des zweiten Punktepaares A_1, B_1, ebenso die des dritten Punktepaares A_2, B_2 sind aus diesen zusammengesetzt.

Wir erhalten nun die Bedingung der Involution der genannten drei Punktepaare, wenn wir in (16) setzen $\lambda_0 = 0$ $\mu_0 = \infty$ und zugleich die Buchstaben λ und μ mit l und m vertauschen:

$$(18) \ldots\ldots\ldots \quad l_1 m_1 - l_2 m_2 = 0.$$

Daraus geht nun die geometrische Bedingung der Involution der drei Punktepaare hervor, wenn wir nach (4) die Werthe der vier Grössen l und m setzen:

$$(19) \ldots \quad \frac{(A_1 A_0)}{(A_1 B_0)} \cdot \frac{(B_1 A_0)}{(B_1 B_0)} - \frac{(A_2 A_0)}{(A_2 B_0)} \cdot \frac{(B_2 A_0)}{(B_2 B_0)} = 0.$$

In dieser Gleichung lassen sich je zwei von den drei Punktepaaren mit einander vertauschen, wodurch man zwei andere aber nur der Form nach verschiedene Bedingungsgleichungen der Involution erhält.

Auf die Form der Gleichungen von drei Punktepaaren auf einer geraden Linie, aus welchen wir die Gleichung (19) abgeleitet haben, können wir die Gleichungen (15) zurückführen, wenn wir setzen: $V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{1}{\nu_0} A_0$, $V_0 - \mu_0 V_1 = \frac{1}{\nu_1} A_1$, woraus folgt:

$$V_0 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \left\{ \frac{\mu_0}{\nu_0} A_0 - \frac{\lambda_0}{\nu_1} A_1 \right\} \quad V_1 = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_0} \left\{ \frac{1}{\nu_0} A_0 - \frac{1}{\nu_1} A_1 \right\}.$$

Setzen wir diese Werthe von V_0 und V_1 in die Gleichungen (15), so ergiebt sich:

$$l_1 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \lambda_1)}{\nu_1(\mu_0 - \lambda_1)}, \; m_1 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \mu_1)}{\nu_1(\mu_0 - \mu_1)}, \; l_2 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \lambda_2)}{\nu_1(\mu_0 - \lambda_2)}, \; m_2 = \frac{\nu_0(\lambda_0 - \mu_2)}{\nu_1(\mu_0 - \mu_2)}$$

Digitized by Google

und die Gleichung (18) geht über in die neue von (16) verschiedene Form der Bedingungsgleichung der Involution von drei Punktepaaren (15):

$$(20) \ldots \quad (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \mu_1)(\mu_0 - \lambda_2)(\mu_0 - \mu_2) - (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_0 - \mu_2)(\mu_0 - \lambda_1)(\mu_0 - \mu_1) = 0.$$

Wie diese von einander verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung der Involution von Linienpaaren oder Punktepaaren direct in einander übergeführt werden können, werden wir in der folgenden Vorlesung aus einander setzen.

Nach der Definition stellen folgende Gleichungen:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = 0 \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = 0$$
$$V_0 + \lambda_0 V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda_1 V_1 = 0 \quad V_0 + \lambda_2 V_1 = 0$$

irgend welche Punktepaare der Involution dar, weil jedes Punktepaar harmonisch ist mit dem Punktepaar $V_0 = 0$, $V_1 = 0$. Um die Gleichungen von Punktepaaren der Involution auf diese Form zurückzuführen, bedarf es freilich der Auflösung einer quadratischen Gleichung.

Führen wir an Stelle der beiden Symbole V_0, V_1 in jene Gleichungen drei Symbole ein, indem wir setzen:

$$V_0 - \lambda_0 V_1 = \frac{U_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_0} \quad V_0 - \lambda_2 V_1 = \frac{U_2}{\lambda_0 - \lambda_1},$$

so haben wir die identische Gleichung:

$$U_0 + U_1 + U_2 \equiv 0$$

und jene sechs Gleichungen gehen über in:

$$U_0 = 0 \qquad U_1 = 0 \qquad U_2 = 0$$
$$\frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 \qquad \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_0}{\mu_0} = 0 \qquad \frac{U_0}{\mu_0} - \frac{U_1}{\mu_1} = 0,$$

wenn man setzt:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \mu_0 \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_2 + \lambda_0} = \mu_1 \quad \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \mu_2.$$

Diese drei Grössen μ in den transformirten Gleichungen der Punktepaare der Involution sind ebenso willkürlich als die drei Grössen λ, aus welchen sie zusammengesetzt sind. Führt man endlich für die allgemeinen Formen U die Normalformen A ein, indem man setzt $\varrho_0 U_0 = A_0$, $\varrho_1 U_1 = A_1$, $\varrho_2 U_2 = A_2$, so geht jene identische Gleichung über in:

$$\frac{A_0}{\varrho_0} + \frac{A_1}{\varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho_2} \equiv 0$$

Digitized by Google

und die Gleichungen von irgend drei Punktepaaren der Involution nehmen die Gestalt an:

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0$$
$$\frac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} - \frac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} = 0 \quad \frac{A_2}{\mu_2 \varrho_2} - \frac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} = 0 \quad \frac{A_0}{\mu_0 \varrho_0} - \frac{A_1}{\mu_1 \varrho_1} = 0.$$

Da nun nach (4) ist:

$$\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2} = \frac{(B_0 A_1)}{(B_0 A_2)} \quad \frac{\mu_2 \varrho_2}{\mu_0 \varrho_0} = \frac{(B_1 A_2)}{(B_1 A_0)} \quad \frac{\mu_0 \varrho_0}{\mu_1 \varrho_1} = \frac{(B_2 A_0)}{(B_2 A_1)},$$

wenn man die Punktepaare bezeichnet mit $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, so erhält man durch Multiplication der letzten drei Gleichungen:

$$(21) \ldots\ldots\ldots 1 = \frac{(B_0 A_1) \cdot (B_1 A_2) \cdot (B_2 A_0)}{(B_0 A_2) \cdot (B_1 A_0) \cdot (B_2 A_1)}$$

eine neue geometrische Bedingungsgleichung für drei Punktepaare der Involution, in welcher man auch die Punkte eines jeden Paares mit einander vertauschen kann.

Durch zwei Punktepaare auf einer geraden Linie ist das Punktepaar nicht vollständig bestimmt, welches mit jenen eine Involution bildet. Wir können uns daher die Aufgabe stellen:

Dasjenige Punktepaar zu bestimmen, welches eine Involution bildet mit zwei gegebenen Punktepaaren auf einer geraden Linie und zugleich eine Involution mit zwei anderen gegebenen Punktepaaren auf derselben geraden Linie.

Die Bedingung, dass drei Punktepaare (15) auf einer geraden Linie eine Involution bilden, ist die Gleichung (16), welche nach λ_0 und μ_0 entwickelt die Form annimmt:

$$\lambda_0 \mu_0 - (\lambda_0 + \mu_0) P + Q = 0.$$

Soll das erste Punktepaar (15) eine Involution bilden mit noch zwei anderen Punktepaaren auf derselben geraden Linie, so haben die Grössen $\lambda_0 \mu_0$ und $\lambda_0 + \mu_0$ einer zweiten linearen Bedingungsgleichung zu genügen. Giebt nun die Auflösung der genannten linearen Gleichungen:

$$\lambda_0 \mu_0 = b \qquad \lambda_0 + \mu_0 = a,$$

so ist:

$$z^2 - az + b = 0$$

die quadratische Gleichung, deren Wurzeln λ_0 und μ_0 das gesuchte Punktepaar bestimmen. Daraus schliessen wir:

Digitized by Google

(22) . . . **Es giebt immer nur ein bestimmtes Punktepaar, welches eine Involution bildet mit zwei gegebenen Punktepaaren und mit zwei anderen gegebenen Punktepaaren auf derselben geraden Linie.**

Nachdem wir im Vorhergehenden die Bedingungen für zwei harmonische Punktepaare und der Involution von drei Punktepaaren in verschiedenen Formen entwickelt haben, werden wir in dem folgenden Theile der Vorlesung vorzugsweise solche lineare Figuren betrachten, in welchen diese Bedingungen erfüllt sind. Die Construction von harmonischen Punktepaaren und Punktepaaren der Involution wird sich daraus von selbst ergeben.

Wir betrachten ein Dreieck, dessen Ecken 0 1 2 durch ihre Gleichungen in der Normalform gegeben seien:

$$A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0.$$

Bezeichnen wir mit $a_0\ a_1\ a_2$ drei willkürliche Grössen, so stellen die Gleichungen:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_0}{a_0} = 0 \quad \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$$

irgend drei Punkte auf den drei Seiten des Dreiecks dar, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen, weil die Summe der drei Gleichungen identisch 0 ist. Wir können deshalb auch kürzer sagen, dass die angegebenen Gleichungen die sechs Schnittpunkte von irgend vier geraden Linien analytisch ausdrücken.

Bezeichnen wir die drei letzten Punkte mit $B_0\ B_1\ B_2$ und die Ecken des Dreiecks mit $A_0\ A_1\ A_2$, so haben wir nach (4):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(B_0 A_1)}{(B_0 A_2)} \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{(B_1 A_2)}{(B_1 A_0)} \quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{(B_2 A_0)}{(B_2 A_1)}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen, so erhalten wir die Gleichung (21), die Bedingungsgleichung der Involution. Dennoch bilden die sechs Punkte keine Involution, weil sie nicht auf einer und derselben geraden Linie liegen. Nur in dem Grenzfalle, wenn die vier geraden Linien mit einer geraden Linie zusammenfallen, liegen sämmtliche sechs Schnittpunkte auf der geraden Linie. Dann werden aber die Schnittpunkte unkenntlich.

Digitized by Google

Die gemachte Bemerkung beweiset nichts weiter, als dass die drei Schnittpunktepaare von vier geraden Linien sich als eine Ausdehnung von Punktepaaren der Involution betrachten lassen, welche nicht auf derselben geraden Linie liegen.

Wenn wir auf jeder Seite des Dreiecks zu dem Schnittpunkte der geraden Linie den vierten harmonischen Punkt fixiren, so stellen sich die Gleichungen dieser Punkte wie folgt dar:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0} = 0 \quad \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = 0.$$

Die Combination der linken Theile der sechs letzten Punktgleichungen giebt identische Gleichungen von der Art:

$$\left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) - \left(\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0}\right) + \left(\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1}\right) \equiv 0,$$

welche den Satz beweisen:

Wenn man die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen durch eine gerade Linie schneidet und zu zwei Schnittpunkten derselben auf den Seiten des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte construirt, so liegen die beiden construirten Punkte und der dritte Schnittpunkt auf einer geraden Linie.

Wenn wir die Zusammensetzung der folgenden vier Punktgleichungen beachten:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ -\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0 \\ \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} &= 0, \end{aligned}$$

so ergeben sich daraus die geometrischen Sätze:

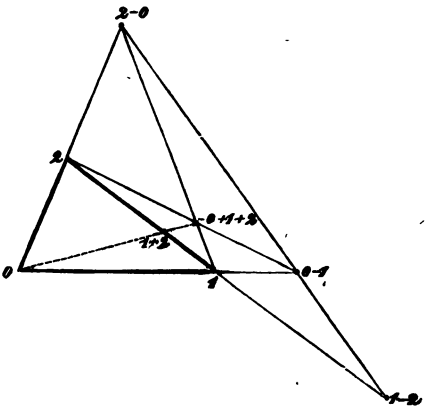
Wenn man die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen durch eine gerade Linie schneidet und auf jeder Seite zu dem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt construirt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die construirten Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, in einem und demselben Punkte.

Digitized by Google

Wenn man die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen durch eine gerade Linie schneidet, zu einem der Schnittpunkte auf der Seite des Dreiecks, auf welcher er liegt, den vierten harmonischen Punkt construirt, und diesen Punkt durch eine gerade Linie mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet, so geht die Verbindungslinie durch den Punkt, in welchem sich die Verbindungslinien der beiden anderen Schnittpunkte und der gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks schneiden.

Zur Erläuterung dieses Satzes dient die folgende Figur:

Fig. 8.



Die Seiten des Dreiecks 0 1 2 sind durch eine beliebige gerade Linie in den Punkten 1 — 2, 2 — 0, 0 — 1 geschnitten. Der vierte harmonische Punkt 1 + 2 zu 1 — 2 auf der Seite 1 2 des Dreiecks ist mit dem Punkte 0 durch eine gerade Linie verbunden, welche durch den Punkt — 0 + 1 + 2 geht, in welchem sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte 0 — 1 und 2 — 0 mit den gegenüberliegenden Ecken 2 und 1 des Dreiecks schneiden. Der Satz lehrt zugleich die Aufgabe lösen:

Wenn von zwei harmonischen Punktepaaren drei Punkte gegeben sind, den vierten harmonischen Punkt linear zu construiren. Denn sind auf einer geraden Linie das Punktepaar 1 2 und der Punkt 1 — 2 gegeben, so construirt man den vierten harmonischen Punkt 1 + 2, indem man ein Dreieck 0 1 2 bildet und dasselbe durch irgend eine gerade Linie (2 — 0, 0 — 1, 1 — 2) schneidet, welche durch den gegebenen Punkt 1 — 2 geht. Verbindet man dann den Schnittpunkt — 0 + 1 + 2 der geraden Linien 0 — 1, 2 und 2 — 0, 1 durch

Digitized by Google

eine gerade Linie mit der Ecke 0 des Dreiecks, so schneidet dieselbe die Seite 1 2 des Dreiecks in dem gesuchten vierten harmonischen Punkte $1 + 2$.

Um den Satz, aus dem wir die Construction des vierten harmonischen Punktes abgeleitet haben, für den Gebrauch bequemer auszusprechen, bemerken wir, dass das Dreieck 0 1 2 mit der geraden Linie $(1 - 2,\ 2 - 0,\ 0 - 1)$ und dasselbe Dreieck 0 1 2 mit dem Punkte $-0 + 1 + 2$ sich gegenseitig bestimmen. Die drei Ecken 0, 1, 2 des Dreiecks und der Punkt $-0 + 1 + 2$ unterliegen keiner Beschränkung. Betrachten wir nun das beliebige Viereck $2, 0, 1, -0 + 1 + 2$, so hat dasselbe zwei Diagonalen. Man nennt das Viereck ein vollständiges Viereck, wenn die gegenüberliegenden Seiten desselben verlängert sind, bis sie sich schneiden, wie man sieht in den Punkten $0 - 1$ und $2 - 0$. Die Verbindungslinie der letzten Schnittpunkte heisst ebenfalls Diagonale des vollständigen Vierecks. Hiernach können wir kürzer sagen:

Jede zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks theilen die dritte Diagonale harmonisch.

Durch vier Punkte lassen sich drei Linienpaare legen, von welchen jedes Paar durch alle vier Punkte geht. Die vier Punkte 0 1 2 3 in der Figur seien gegeben durch ihre Gleichungen:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0.$$

Wir schneiden jene drei Linienpaare, welche diese vier Punkte paarweise verbinden, durch eine gerade Linie L und suchen die Schnittpunktepaare zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass $u_0\ u_1$ .. die Werthe seien, welche die Ausdrücke U_0, U_1 .. annehmen, wenn man in letzteren für die laufenden Coordinaten die Coordinaten der geraden Linie L setzt. Alsdann sind:

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = 0$$
$$\frac{U_1}{u_1} - \frac{U_2}{u_2} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_0}{u_0} = 0 \quad \frac{U_0}{u_0} - \frac{U_1}{u_1} = 0$$

die Gleichungen der gesuchten Punktepaare auf Grund ihrer Zusammensetzung und weil sie sämmtlich erfüllt werden, wenn man für die variabeln Coordinaten die Coordinaten der geraden Linie setzt.

Digitized by Google

Bringen wir nun die drei oberen Gleichungen auf die Normalform, indem wir setzen:

$$\frac{U_0}{u_0} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_0}{\varrho_0 \mu_0} \quad \frac{U_1}{u_1} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_1}{\varrho_1 \mu_1} \quad \frac{U_2}{u_2} - \frac{U_3}{u_3} = \frac{A_2}{\varrho_2 \mu_2},$$

so stellen sich jene sechs Gleichungen dar als Ausdrücke der Symbole A wie folgt:

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{\varrho_1 u_1} - \frac{A_2}{\varrho_2 \mu_2} = 0 \quad \frac{A_2}{\varrho_2 \mu_2} - \frac{A_0}{\varrho_0 \mu_0} = 0 \quad \frac{A_0}{\varrho_0 \mu_0} - \frac{A_1}{\varrho_1 \mu_1} = 0.$$

Es sind dieses dieselben Gleichungen, aus welchen wir die Bedingungsgleichung (21) der Involution von drei Punktepaaren abgeleitet haben. Da sie selbst Punktepaare der Involution darstellen, so können wir sagen:

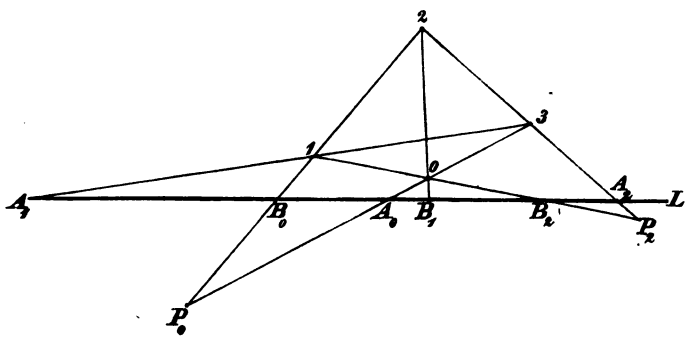
Jede gerade Linie schneidet die drei Linienpaare, welche irgend vier Punkte paarweise verbinden, in Punktepaaren der Involution.

Dieser Satz lehrt die Aufgabe lösen:

Wenn von drei Punktepaaren der Involution auf einer geraden Linie fünf Punkte gegeben sind, den sechsten Punkt linear zu construiren.

Sind von den Punktepaaren $A_0\,B_0$, $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$ der Involution auf der geraden Linie L die fünf ersten gegeben, so

Fig. 9.



construiren wir den gesuchten Punkt B_2 in folgender Art. Wir legen durch die Punkte $A_2\,A_1\,B_0$ irgend drei gerade Linien, welche das Dreieck 1 2 3 bilden. Ziehen wir alsdann die gera-

Digitized by Google

den Linien $(3A_0)$ und $(2B_1)$ und verbinden den Schnittpunkt 0 derselben mit dem Punkte 1 durch eine gerade Linie, so trifft dieselbe die gerade Linie L in dem gesuchten Punkte B_2.

Wenn man in der beschriebenen Figur die gerade Linie L in die Lage von $(P_0\ P_2)$ rücken lässt, so fällt das Punktepaar $A_0\ B_0$ mit P_0 und das Punktepaar $A_2\ B_2$ mit P_2 zusammen und nach Satz (17) wird das dritte Punktepaar $A_1\ B_1$ harmonisch mit dem Punktepaar $P_0\ P_2$. Dieses beweiset auch der vorletzte Satz. Denn die gerade Linie L, wenn sie durch P_0 und P_2 geht, ist eine Diagonale des vervollständigten Vierecks 0 1 2 3, die von den beiden anderen Diagonalen in harmonischen Punkten geschnitten wird.

Die beschriebene Figur stellt drei Linienpaare dar, welche vier Punkte 0 1 2 3 paarweise verbinden und eine gerade Linie L, welche jene schneidet. Die Gleichungen der Schnittpunkte haben wir am Anfange unserer Untersuchung aufgestellt. Fixiren wir nun auf jeder jener sechs geraden Linien denjenigen Punkt, welcher harmonisch ist zu dem Schnittpunkt der geraden Linie L, so sind die Gleichungen dieser Punkte:

$$\frac{U_0}{u_0} + \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_1}{u_1} + \frac{U_3}{u_3} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_3}{u_3} = 0$$
$$\frac{U_1}{u_1} + \frac{U_2}{u_2} = 0 \quad \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_0}{u_0} = 0 \quad \frac{U_0}{u_0} + \frac{U_1}{u_1} = 0.$$

Da aus jedem dieser Gleichungenpaare durch Addition die Gleichung hervorgeht:

$$\frac{U_0}{u_0} + \frac{U_1}{u_1} + \frac{U_2}{u_2} + \frac{U_3}{u_3} = 0,$$

so haben wir durch diese einfache Bemerkung den Satz bewiesen:

Wenn man drei Linienpaare, welche vier Punkte paarweise verbinden, durch eine gerade Linie schneidet, und zu jedem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt construirt auf der von jenen sechs geraden Linien, auf welcher der Schnittpunkt liegt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die construirten Punkte paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte.

Digitized by Google

Lässt man die, die Figur schneidende, gerade Linie in das Unendliche fallen, so specialisirt sich der Satz wie folgt:

Die drei geraden Linien, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten und die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines Vierecks verbinden, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Sechste Vorlesung.

Zur Involution.

Wir haben in den vorhergehenden Vorlesungen vielfache Gelegenheit gehabt zu sehen, wie dieselben analytischen Formeln eine doppelte geometrische Deutung erfahren, je nachdem man die Variabeln in ihnen als Punktcoordinaten oder als Liniencoordinaten betrachtet. Es ist gewiss nicht zu viel behauptet, wenn man sagt, dass nach Feststellung des Begriffes der Punktgleichung die vierte und fünfte Vorlesung eine ganz nothwendige Folge seien aus der zweiten und dritten Vorlesung. Die vierte und die fünfte Vorlesung enthalten in der That nichts als eine neue Art, dieselben analytischen Formeln zu lesen.

Obwohl wir bemüht sein werden, diese doppelte Lesart analytischer Formeln auch in den folgenden Vorlesungen durchzuführen, so wird es für die gegenwärtige Vorlesung, die den bereits behandelten Gegenstand der Involution aus einem anderen Gesichtspunkte wieder aufnimmt, genügen, auf die doppelte Interpretation nur gelegentlich aufmerksam zu machen.

Wenn $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen von irgend zwei gegebenen Punkten sind, so verlangt es die Analogie, dass man die Gleichung:

$$U_0 U_1 = 0$$

für die Gleichung des Punktepaares nehme, weil die Coordinaten jeder geraden Linie, welche durch den einen oder den anderen Punkt geht, dieser Gleichung genügen, und weil

Digitized by Google

umgekehrt alle geraden Linien, deren Coordinaten der Gleichung genügen, entweder durch den einen oder den anderen Punkt gehen.

Man erhält also die Gleichung eines Punktepaares, wenn man die Gleichungen der Punkte mit einander multiplicirt.

Sind nun die Gleichungen zweier Punkte in der Form $V_0 - \lambda V_1 = 0$ und $V_0 - \mu V_1 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Punktepaares:

$$V_0^2 - (\lambda + \mu)\ V_0 V_1 + \lambda\mu\ V_1^2 = 0,$$

oder allgemeiner:

$$(1) \ldots\ldots\ A V_0^2 + B V_0 V_1 + C V_1^2 = 0,$$

wenn man setzt:

$$\lambda\mu = \frac{C}{A}, \quad \lambda + \mu = -\frac{B}{A}.$$

Wenn ein anderes Punktepaar $V_0 - \lambda_1 V_1 = 0$, $V_0 - \mu_1 V_1 = 0$ auf derselben geraden Linie durch die Gleichung gegeben ist:

$$(2) \ldots\ldots\ A_1 V_0^2 + B_1 V_0 V_1 + C_1 V_1^2 = 0,$$

so hat man:

$$\lambda_1\mu_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad \lambda_1 + \mu_1 = -\frac{B_1}{A_1}.$$

Die Bedingung, dass die beiden Punktepaare harmonisch zu einander seien, ist nach (12) der fünften Vorlesung:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0,$$

welche Gleichung durch Substitution der Werthe von λ und μ ... übergeht in:

$$(3) \ldots\ldots\ C A_1 - \tfrac{1}{2} B B_1 + A C_1 = 0.$$

Demnach können wir sagen:

(4) ... Wenn die Gleichungen von zwei Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie in der Form (1) und (2) gegeben sind, so sind die beiden Punktepaare harmonisch zu einander unter der Bedingung (3).

[Sind zwei Linienpaare, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, durch ihre Gleichungen in der Form (1) und

Digitized by Google

(2) gegeben, so ist die Gleichung (3) ebenfalls die Bedingung, dass die Linienpaare harmonisch seien.]

Hiernach stellt die Gleichung (1) mit den veränderlichen Coefficienten A, B, C alle möglichen Punktepaare dar, welche harmonisch sind zu einem ganz bestimmten Punktepaare, wenn jene Coefficienten einer linearen Bedingungsgleichung genügen:

(5) . . . . . $Aa + Bb + Cc = 0.$

Drei solcher Punktepaare bilden nach der Definition eine Involution.

Es bilden demnach das Punktepaar (1), das Punktepaar (2) und das durch die Gleichung:

(6) . . . . . $A_2 V_0^2 + B_2 V_0 V_1 + C_2 V_1^2 = 0$

gegebene Punktepaar eine Involution, wenn sich drei Grössen a, b, c so bestimmen lassen, dass man hat:

$$\begin{aligned} A\,a + B\,b + C\,c &= 0 \\ A_1 a + B_1 b + C_1 c &= 0 \\ A_2 a + B_2 b + C_2 c &= 0. \end{aligned}$$

Wir drücken diese Bedingungen kurz so aus:

(7) . . . Drei durch ihre Gleichungen (1), (2) und (6) gegebene Punktepaare auf einer geraden Linie sind in Involution, wenn sich drei Grössen der Art bestimmen lassen, dass sie respective für V_0^2, $V_0 V_1$ und V_1^2 in die Gleichungen gesetzt den drei Gleichungen zugleich genügen.

Wenn sich aber drei Grössen a, b, c so bestimmen lassen, dass sie den drei letzten Gleichungen genügen, so lassen sich auch drei Grössen α, β, γ der Art bestimmen, dass den drei folgenden Gleichungen genügt wird:

$$\begin{aligned} A\alpha + A_1\beta + A_2\gamma &= 0 \\ B\alpha + B_1\beta + B_2\gamma &= 0 \\ C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen ebenso die Bedingung der Involution ausdrücken.

Diese Gleichungen sind die analytischen Ausdrücke des Satzes:

Digitized by Google

(8) . . . **Drei durch ihre Gleichungen (1), (2), (6) gegebene Punktepaare auf einer geraden Linie sind in Involution, wenn die Gleichungen mit gewissen constanten Factoren multiplicirt und hierauf addirt identisch 0 geben.**

In den beiden letzten Sätzen kann man auch statt „Punktepaare auf einer geraden Linie" sagen „Linienpaare, welche von demselben Punkte ausgehen". Sie behalten ihre Geltung.

Nachdem wir auf diese Weise der Bedingung der Involution einen anderen Ausdruck gegeben haben, gehen wir wieder zurück auf die Bedingungen der Involution von drei Punktepaaren in der früheren Form, um sie einer eingehenderen Discussion zu unterwerfen. Wir wiederholen deshalb die Resultate der vorhergehenden Vorlesung mit den Worten:

„Wenn drei Punktepaare 12, 34, 56 auf einer geraden Linie durch ihre Gleichungen:

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{array}{lll} V_0 - \lambda_1 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_3 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_5 V_1 = 0 \\ V_0 - \lambda_2 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_4 V_1 = 0 & V_0 - \lambda_6 V_1 = 0 \end{array}$$

gegeben sind, so ist nach (20) der fünften Vorlesung die Bedingung der Involution der drei Punktepaare:

$$(10) \quad \ldots \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6) = 0,$$

oder auch nach (16):

$$(11) \quad (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6) = 0."$$

Diese beiden Gleichungen, von welchen jede die Bedingung der Involution ausdrückt, sind ihrem Wesen nach eine und dieselbe Gleichung, nur ihrer Form nach sind sie verschieden. Man erhält aber aus (10) noch zwei andere, der Form nach verschiedene Gleichungen, wenn man λ_1 mit λ_4 und zugleich λ_2 mit λ_3, oder wenn man λ_1 mit λ_6 und zugleich λ_2 mit λ_5 vertauscht. Ebenso erhält man aus (11) noch drei andere Gleichungen, wenn man entweder λ_1 mit λ_2 oder λ_3 mit λ_4 oder λ_5 mit λ_6 vertauscht. Da durch die angegebenen Vertauschungen die Punktepaare (9) nur in einander übergehen, so braucht nur eine von den sieben

Digitized by Google

angegebenen Gleichungen erfüllt zu sein, die sechs anderen werden von selber erfüllt.

Die linken Theile dieser Gleichungen sind die sieben ganzen Functionen der sechs Grössen λ:

$$
\begin{aligned}
F_{12} &= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6) \\
&\quad - (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6) \\
F_{34} &= (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) \\
&\quad - (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \\
F_{56} &= (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_4) \\
&\quad - (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5) \\
&\quad + (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6) \\
F_2 &= (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_5) \\
&\quad + (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_6) \\
F_3 &= (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_5) \\
&\quad + (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6) \\
F_4 &= (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6) \\
&\quad + (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5).
\end{aligned}
$$

Werden die sechs Grössen λ als willkürliche genommen, so verschwindet keine der sieben Functionen F. Sobald aber die sechs Grössen λ solche Werthe annehmen, dass eine jener sieben Functionen F verschwindet, so verschwinden mit der einen auch die sechs anderen. Es können daher jene sieben Functionen F der sechs willkürlichen Grössen λ nur durch gewisse Factoren von einander unterschieden sein.

Diese Factoren zu ermitteln wird deshalb von Interesse sein, weil die Produkte der Factoren und der ihnen entsprechenden Functionen F sieben identische Functionen von sechs willkürlichen Grössen λ geben, welche in der Form wesentlich von einander unterschieden sind. Ein anderes Interesse hat die angedeutete Frage, weil ihre Beantwortung lehren muss, die geometrischen Bedingungsgleichungen der Involution (19) und (21) und die fünf anderen Gleichungen, welche aus ihnen durch Vertauschungen hervorgingen, eine aus der anderen wirklich abzuleiten. Denn drückt man die Entfernungen der sechs Punkte der Involution, wie sie in den Gleichungen (19) und (21) vorkommen, durch die Entfernungen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$ der sechs Punkte

Digitized by Google

von einem beliebigen Punkte auf der geraden Linie aus, auf welcher sie liegen, so erhält man gerade die Gleichungen:

$$F_{12} = 0 \quad \text{und} \quad F_1 = 0,$$

welche Gleichungen aus einander und aus welchen Gleichungen die übrigen fünf Gleichungen $F = 0$ folgen sollen. Dieses verlangte unsere geometrische Untersuchung. Will nun die Algebra hinter der Geometrie nicht zurückbleiben, so bleibt ihr nichts übrig als nachzuweisen:

Mit welchen Factoren die sieben Functionen F in (12) zu multipliciren sind, um die Produkte identisch zu machen.

Um die angeregte Frage zu beantworten, gehen wir von einem bekannten algebraischen Satze aus, den wir in dem speciellen Falle, der hier Anwendung findet, so wiedergeben:

„Wenn man mit $\pi_1\ \pi_2 \ldots \pi_6$ die Produkte der Differenzen von irgend sechs Grössen $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_6$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)\ (\lambda_1 - \lambda_3) \ldots (\lambda_1 - \lambda_6) \\
\pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\ (\lambda_2 - \lambda_3) \ldots (\lambda_2 - \lambda_6) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)\ (\lambda_6 - \lambda_2) \ldots (\lambda_6 - \lambda_5),
\end{aligned}$$

wenn ferner $\varphi(\lambda)$ irgend eine ganze Function von λ des vierten Grades ist, so hat man identisch:

$$(13) \ldots \quad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \ldots \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.\text{“ *)}$$

---

*) Den Beweis des algebraischen Satzes entnehmen wir aus der Zerlegung des Bruches:

$$\frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)\ (\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_6)}$$

in Partialbrüche:

$$\frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)\ (\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_6)} = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda - \lambda_2} + \ldots \frac{a_6}{\lambda - \lambda_6}.$$

Der Zähler a_1 des ersten Partialbruches wird dadurch bestimmt, dass man die angegebene identische Gleichung multiplicirt mit dem Produkte der Nenner sämmtlicher Partialbrüche und hierauf für λ setzt λ_1. Ebenso werden die Werthe der übrigen Zähler der Partialbrüche gefunden:

$$a_1 = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} \quad a_2 = \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} \quad \ldots \quad a_6 = \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6}$$

Digitized by Google

Wenn man in der Gleichung (13) für die Function des vierten Grades setzt: $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^2$, so verschwinden die beiden ersten Glieder in dieser Gleichung. Vereiniget man die beiden folgenden Glieder, ebenso die beiden letzten, so erhält man nach Unterdrückung der gleichen Factoren:

$$\frac{F_{34}}{\lambda_3 - \lambda_4} = \frac{F_{56}}{\lambda_5 - \lambda_6}.$$

Diese Gleichung ist eine identische Gleichung, weil sie aus der identischen Gleichung (13) hervorgegangen ist. Jene Gleichung (13) bleibt ungeändert, wenn man für:

$$\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6$$

respective setzt:

$$\lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6 \ \lambda_1 \ \lambda_2.$$

Es bleibt also auch diese Gleichung dadurch unverändert. Bemerkt man aber, dass durch die angegebenen Veränderungen die drei Functionen F_{12}, F_{34}, F_{56} in einander übergehen, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung:

$$(14) \ldots\ldots \quad \frac{F_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{F_{34}}{\lambda_3 - \lambda_4} = \frac{F_{56}}{\lambda_5 - \lambda_6}.$$

Setzt man nun, um auf die anderen Functionen F zu kommen, $\lambda_1 - \lambda_2 = \varepsilon$, so wird:

$$\frac{F_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3 + \varepsilon)(\lambda_2 - \lambda_4 + \varepsilon)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_5 + \varepsilon)(\lambda_2 - \lambda_6 + \varepsilon)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{\varepsilon}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von ε und dividirt, so wird der rechte Theil der Gleichung

---

Setzt man nun in der identischen Gleichung $\lambda = \frac{1}{x}$, so geht mit Weglassung des Factors x auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe über in:

$$\frac{x^5 \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\ldots(1-\lambda_6 x)} = \frac{a_1}{1-\lambda_1 x} + \frac{a_2}{1-\lambda_2 x} + \ldots \frac{a_6}{1-\lambda_6 x}.$$

Da nun $x^5 \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ eine ganze Function von x ist mit dem Factor x, so verschwindet der linke Theil der Gleichung, wenn man x gleich 0 setzt, und man erhält:

$$0 = a_1 + a_2 + \ldots a_6,$$

was zu beweisen war.

Digitized by Google

$$= \{\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_4 + \varepsilon\}\ (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_6)$$
$$- \{\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_2 - \lambda_6 + \varepsilon\}\ (\lambda_2 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_4)$$

und wenn man den Werth von $\varepsilon = \lambda_1 - \lambda_2$ wieder einsetzt:

$$= \{(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_4)\}\ (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_6)$$
$$- \{(\lambda_2 - \lambda_5) + (\lambda_1 - \lambda_6)\}\ (\lambda_2 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_4).$$

Vereiniget man die Glieder der Entwickelung, welche die Factoren $\lambda_2 - \lambda_3$ und $\lambda_2 - \lambda_5$ zugleich enthalten, und lässt die übrigen folgen, so erhält man:

$$= (\lambda_2 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_3)\ (\lambda_2 - \lambda_4)\ (\lambda_1 - \lambda_6)$$
$$+ (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_6)\ (\lambda_1 - \lambda_4).$$

Setzt man dafür:

$$= \{(\lambda_2 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_3)\}\ (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_4 - \lambda_6) - \{(\lambda_2 - \lambda_5) + (\lambda_5 - \lambda_3)\}$$
$$(\lambda_2 - \lambda_4)\ (\lambda_1 - \lambda_6) + (\lambda_2 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_6)\ (\lambda_1 - \lambda_4)$$

und entwickelt, so erhält man:

$$= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6)$$
$$+ (\lambda_2 - \lambda_5)\{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6) + (\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_4)\}.$$

Man sieht hier, dass die letzten Glieder sich gegenseitig zerstören und nur die beiden ersten Glieder übrig bleiben, deren Summe $= F_3$ ist. Man hat daher:

$$\frac{F_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = F_3.$$

Einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man die identischen Gleichungen:

$$(\lambda_1 - \lambda_4)\ (\lambda_2 - \lambda_6) = (\lambda_1 - \lambda_2)\ (\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_1 - \lambda_6)\ (\lambda_4 - \lambda_2);$$
$$(\lambda_1 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_3) = (\lambda_1 - \lambda_2)\ (\lambda_5 - \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_3)\ (\lambda_5 - \lambda_2)$$

zur Umformung von F_{12} benutzt. Denn setzt man in dem ersten Gliede von F_{12} für die Factoren $(\lambda_1 - \lambda_4)\ (\lambda_2 - \lambda_6)$ und im zweiten Gliede für die Factoren $(\lambda_1 - \lambda_5)\ (\lambda_2 - \lambda_3)$ ihre Werthe aus den identischen Gleichungen, so zerstören sich von den vier dadurch entstandenen Gliedern in F_{12} diejenigen, welche den Factor $(\lambda_1 - \lambda_2)$ nicht haben, und die beiden übrig bleibenden bilden gerade das Produkt $(\lambda_1 - \lambda_2)\ F_3$.

Da der linke Theil der zuletzt aus der identischen Gleichung (13) hervorgegangenen Gleichung ungeändert bleibt, wenn man λ_1 mit λ_2 oder λ_3 mit λ_4 oder λ_5 mit λ_6 vertauscht, wodurch die Functionen $F_1\ F_2\ F_3\ F_4$ in einander übergehen, so muss auch

Digitized by Google

der rechte Theil derselben F_3 ungeändert bleiben und man hat mit Rücksicht auf (14) als Antwort auf die oben angeregte Frage die identischen Gleichungen:

$$(15) \ldots \quad \frac{F_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{F_{34}}{\lambda_3 - \lambda_4} = \frac{F_{56}}{\lambda_5 - \lambda_6} = \\ = F_1 = F_2 = F_3 = F_4.$$

Um eine Anwendung von diesen Gleichungen zu machen, stellen wir in der Voraussetzung, dass die sechs Grössen λ irgend welche seien, die Gleichungen auf:

$$(16) \quad \begin{array}{l} (\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_4)(\beta-\lambda_5) - (\alpha-\lambda_4)(\alpha-\lambda_5)(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2) = 0 \\ (\alpha-\lambda_2)(\alpha-\lambda_3)(\beta-\lambda_5)(\beta-\lambda_6) - (\alpha-\lambda_5)(\alpha-\lambda_6)(\beta-\lambda_2)(\beta-\lambda_3) = 0 \\ (\alpha-\lambda_3)(\alpha-\lambda_4)(\beta-\lambda_6)(\beta-\lambda_1) - (\alpha-\lambda_6)(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_3)(\beta-\lambda_4) = 0. \end{array}$$

Diese drei Gleichungen gehen in einander über, wenn man für den Index 6 setzt den Index 1 und zugleich die übrigen fünf Indices um eine Einheit erhöht. Von ihnen ist jede Gleichung die Folge aus den beiden anderen. Denn multiplicirt man dieselben auf einander folgend mit den Factoren:

$$(\alpha-\lambda_3)(\beta-\lambda_6) \quad -(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_4) \quad (\alpha-\lambda_5)(\beta-\lambda_2)$$

und addirt, so sieht man, ohne die Produkte aufzulösen, dass man identisch 0 erhält.

Es brauchen daher nur zwei von den drei Gleichungen (16) erfüllt zu sein, die dritte wird von selber erfüllt. Da aber zwei von den drei Gleichungen durch gewisse Werthe der Unbekannten α, β immer erfüllt werden können, so erfüllen auch die durch die beiden Gleichungen bestimmten Werthe der Unbekannten die dritte Gleichung.

Jede der drei Gleichungen (16) ist die Bedingung für die Involution von sechs Punkten auf einer geraden Linie, der beiden durch die Gleichungen $V_0 - \alpha V_1 = 0$, $V_0 - \beta V_1 = 0$ dargestellten Punkte α, β und vieren von den Punkten 1 2 ... 6, und die drei Gleichungen selbst drücken analytisch den Satz aus:

(17) ... Wenn irgend sechs Punkte 1, 2 ... 6 auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es immer ein Punktepaar α, β, welches gleichzeitig mit den beiden Punktepaaren 1, 2 und 4, 5, mit den beiden Punktepaaren 2, 3 und 5, 6 und mit den beiden Punktepaaren 3, 4 und 6, 1 eine Involution bildet.

Digitized by Google

Dividirt man jede von den Gleichungen (16) durch $\alpha - \beta$, so erhält man mit Rücksicht auf (15):

$$(18)\quad \begin{aligned} &(\lambda_2-\alpha)(\lambda_5-\lambda_1)(\beta-\lambda_4)+(\lambda_1-\beta)(\lambda_4-\lambda_2)(\alpha-\lambda_5)=0\\ &(\lambda_3-\alpha)(\lambda_6-\lambda_2)(\beta-\lambda_5)+(\lambda_2-\beta)(\lambda_5-\lambda_3)(\alpha-\lambda_6)=0\\ &(\lambda_4-\alpha)(\lambda_1-\lambda_3)(\beta-\lambda_6)+(\lambda_3-\beta)(\lambda_6-\lambda_4)(\alpha-\lambda_1)=0. \end{aligned}$$

In dieser Form sieht man es den Gleichungen nicht mehr an, dass sie mit den oben angegebenen Factoren multiplicirt und addirt 0 geben. Wir legen darauf auch weiter kein Gewicht, behalten aber die Eigenschaft dieser Gleichungen im Auge, dass die Werthe von α und β, wie sie sich aus zwei Gleichungen ergeben, auch der dritten Gleichung genügen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Werthe von α und β aus zwei von jenen Gleichungen gefunden werden können.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (18), so nehmen sie die Form an:

$$(19)\quad \begin{aligned} A_1\alpha\beta + B_1(\alpha+\beta) + C_1 &= 0\\ A_2\alpha\beta + B_2(\alpha+\beta) + C_2 &= 0\\ A_3\alpha\beta + B_3(\alpha+\beta) + C_3 &= 0, \end{aligned}$$

indem die neun Coefficienten A, B, C gewisse Functionen der gegebenen sechs Grössen λ bedeuten.

Es sind dieses lineare Gleichungen, wenn man die Grössen $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ als die Unbekannten betrachtet. Löset man zwei von diesen Gleichungen nach den Unbekannten auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\alpha+\beta = A \qquad \alpha\beta = B$$

und man kann eine quadratische Gleichung bilden:

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Grössen α und β sind. Man hat also nur ein Punktepaar α, β, welches zweien von den Gleichungen (19) genügt, und dieses genügt auch der dritten Gleichung.

Wenn man in den Gleichungen (19) setzt: $\alpha = \beta = \lambda$, so gehen sie über in:

$$(20)\quad \begin{aligned} A_1\lambda^2 + 2B_1\lambda + C_1 &= 0\\ A_2\lambda^2 + 2B_2\lambda + C_2 &= 0\\ A_3\lambda^2 + 2B_3\lambda + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Diese Gleichungen bestehen aber nicht mehr zugleich wie die Gleichungen (19), aus welchen sie auf die angegebene Art hervorgegangen sind. Es sind eben anders gestaltete Gleichungen, die einzeln eine geometrische Interpretation verlangen.

Die erste Gleichung (19) ist die Bedingung, dass die Punktepaare $\alpha\beta$; 12; 45 eine Involution bilden. Durch diese eine Gleichung ist das erste Punktepaar $\alpha\beta$ nicht bestimmt, wenn die beiden anderen gegeben sind. Für jeden Punkt α giebt es einen entsprechenden β. Man kann daher nach der Lage des Punktes α fragen, dessen entsprechender Punkt β mit ihm zusammenfällt. Diese Frage beantwortet die erste Gleichung (20), welche aussagt, dass es für den Punkt α zwei Lagen giebt, in welchen der Punkt α mit seinem entsprechenden β zusammenfällt.

Wenn wir diese beiden Lagen des Punktes α als ein Punktepaar λ auffassen, so bestimmen die Wurzeln λ', λ'' der ersten Gleichung (20) dieses Punktepaar. Da man nun hat:

$$\lambda'\lambda'' = \frac{C_1}{A_1} \qquad \lambda' + \lambda'' = -\frac{2B_1}{A_1},$$

so lässt sich nach der zu Anfang der Vorlesung festgestellten Regel auch die Gleichung dieses Punktepaares λ leicht angeben:

$$A_1 V_0^2 + 2B_1 V_0 V_1 + C_1 V_1^2 = 0.$$

Dieses Punktepaar λ ist harmonisch sowohl zu dem Punktepaare 12 als zu dem Punktepaare 45.

Diesen Satz kann man sich in folgender Art klar machen:

Nach dem Satze (14) der fünften Vorlesung giebt es ein Punktepaar λ, welches harmonisch ist sowohl zu dem gegebenen Punktepaare 12 als zu dem gegebenen Punktepaare 45. Alle Punktepaare $\alpha\beta$, welche mit den gegebenen beiden Punktepaaren eine Involution bilden, sind nach der Definition der Involution harmonisch zu dem Punktepaare λ und umgekehrt jedes Punktepaar $\alpha\beta$, welches harmonisch ist zu dem Punktepaare λ, bildet mit den gegebenen beiden Punktepaaren eine Involution. Das Punktepaar $\alpha\beta$ der Involution, welches sich in einem Punkte vereiniget, ist daher auch harmonisch zu dem Punktepaare λ, und fällt mit einem der beiden Punkte λ zusammen. Es giebt aber nur zwei Punkte, in deren jedem sich das zum Punktepaare λ harmonische Punktepaar $\alpha\beta$ in einem Punkte vereiniget. Dieses sind eben die beiden Punkte λ. Sie sind also harmonisch zu jedem der gegebenen Punktepaare.

Digitized by Google

Wie die zuletzt aufgestellte Gleichung aus der ersten Gleichung (20) hervorging, so gehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 V_0^2 + 2B_1 V_0 V_1 + C_1 V_1^2 &= 0 \\ A_2 V_0^2 + 2B_2 V_0 V_1 + C_2 V_1^2 &= 0 \\ A_3 V_0^2 + 2B_3 V_0 V_1 + C_3 V_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

aus den Gleichungen (20) hervor.

Die erste Gleichung stellt, wie bereits bewiesen wurde, dasjenige Punktepaar dar, welches harmonisch ist zu den Punktepaaren 12 und 45. Die zweite Gleichung ist ebenso der analytische Ausdruck desjenigen Punktepaares, welches harmonisch ist zu den Punktepaaren 23 und 45. Die dritte Gleichung endlich repräsentirt dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist zu den Punktepaaren 45 und 61.

Da nun diese Gleichungen zugleich erfüllt werden, wenn man für V_0^2, $V_0 V_1$, V_1^2 respective setzt $\alpha\beta$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$, 1, weil sie dadurch in die Gleichungen (19) übergehen, so können wir mit Rücksicht auf (7) den Satz aussprechen:

(22) ... Wenn irgend sechs Punkte 1 2 ... 6 auf einer geraden Linie gegeben sind, und man construirt drei Punktepaare, von welchen das erste harmonisch ist zu den Punktepaaren 12 und 45, das zweite harmonisch zu den Punktepaaren 23 und 56, das dritte harmonisch zu den Punktepaaren 34 und 61, so bilden die drei construirten Punktepaare eine Involution.

Betrachten wir irgend vier Punkte 1 2 3 4 auf einer geraden Linie, die durch die vier ersten Gleichungen (9) gegeben seien, so können wir aus ihnen drei Gruppen von Punktepaaren 12, 34; 23, 14 und 13, 24 bilden. Die Bedingungen, dass ein Punktepaar α, β, ausgedrückt durch die Gleichungen $V_0 - \alpha V_1 = 0$, $V_0 - \beta V_1 = 0$, harmonisch sei zu der letzten Gruppe 13, 24, stellen die Gleichungen dar:

$$\frac{\alpha-\lambda_1}{\alpha-\lambda_3} = -\frac{\beta-\lambda_1}{\beta-\lambda_3}; \quad \frac{\alpha-\lambda_2}{\alpha-\lambda_4} = -\frac{\beta-\lambda_2}{\beta-\lambda_4}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen und dividirt sie durch einander, so erhält man:

Digitized by Google

$$(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_3)(\beta-\lambda_4) = (\alpha-\lambda_3)(\alpha-\lambda_4)(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)$$
$$(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_4)(\beta-\lambda_2)(\beta-\lambda_3) = (\alpha-\lambda_2)(\alpha-\lambda_3)(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_4)$$

die Bedingungen der Involution des Punktepaares $\alpha\beta$ mit der ersten Gruppe 12, 34, und der zweiten Gruppe 23, 14. Daraus entspringt der Satz:

(23) . . . Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist mit jedem Punktepaare einer Gruppe, bildet eine Involution mit den Punktepaaren der beiden anderen Gruppen; und dasjenige Punktepaar, welches mit zwei Gruppen eine Involution bildet, ist harmonisch mit jedem Punktepaare der dritten Gruppe.

Es sei nun $\alpha_1\beta_1$ dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist sowohl mit dem Punktepaar 12 als mit dem Punktepaar 34 der ersten Gruppe. Dieses Punktepaar $\alpha_1\beta_1$ ist harmonisch nicht allein mit den genannten beiden Punktepaaren, sondern auch mit dem Punktepaar $\alpha\beta$, weil die Punktepaare 12, 34, $\alpha\beta$ eine Involution bilden. Wir haben daher den Satz:

(24) . . . Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Construirt man drei Punktepaare, von denen jedes harmonisch ist mit den Punktepaaren einer Gruppe, so sind je zwei construirte Punktepaare harmonisch.

Mit diesem Satze werden wir uns in der folgenden Vorlesung eine geometrische Anschauung von der Auflösung biquadratischer Gleichungen verschaffen.

Digitized by Google

Siebente Vorlesung.

Die Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Eine biquadratische Gleichung:

$$(1) \ldots \quad a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

mit den gegebenen fünf Coefficienten a auflösen, heisst bekanntlich die vier Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmen, welche, für λ in die Gleichung gesetzt, derselben genügen, oder die gegebene Gleichung in ihre Factoren zerlegen:

$$(2) \ldots \quad a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0.$$

Um mit dieser Gleichung eine geometrische Vorstellung zu verbinden, nehmen wir irgend zwei durch ihre Gleichungen $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ gegebene Punkte als Fundamentalpunkte der geometrischen Anschauung. Jeder Punkt der geraden Linie, welche durch diese Punkte geht, wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(3) \ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0.$$

Setzen wir den Werth von λ aus dieser Gleichung in die Gleichung, welche wir erhalten, wenn wir einen der vier Factoren in (2) gleich 0 setzen, zum Beispiel in die Gleichung $\lambda - \lambda_1 = 0$, so erhalten wir $A_0 - \lambda_1 A_1 = 0$, die Gleichung eines ganz bestimmten Punktes der geraden Linie. Dieser Punkt ist bestimmt durch die erste Wurzel λ_1 der biquadratischen Gleichung (1).

So entspricht jeder Wurzel der biquadratischen Gleichung ein Punkt der geraden Linie, und wir werden sagen, die biquadratische Gleichung (1) repräsentire vier bestimmte Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, deren Gleichung aus (1) erhalten wird, wenn man den Werth von λ aus (3) einsetzt.

Die Bedingungsgleichung der Involution

$$(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6) = 0$$

von drei Punktepaaren $\lambda_1\,\lambda_2$; $\lambda_3\,\lambda_4$; $\lambda_5\,\lambda_6$, welche bekanntlich ungeändert bleibt, wenn man die Punkte eines Paares oder auch

Digitized by Google

ein Punktepaar mit einem anderen vertauscht, geht über in die in λ quadratische Gleichung:

$$(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)+(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)=0,$$

wenn man setzt $\lambda_5=\lambda_6=\lambda$. Sie repräsentirt das Punktepaar $\alpha\beta$, welches harmonisch ist sowohl mit dem Punktepaare $\lambda_1\lambda_2$ als auch mit dem Punktepaar $\lambda_3\lambda_4$. Denn man erhält die Gleichungen dieses Punktepaares, wenn man in (3) für λ die Wurzeln α, β der quadratischen Gleichung setzt.

Auf diese Weise repräsentiren die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)+(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)=0\\
(4)\ \ .\ .\ \ &(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)+(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)=0\\
&(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)+(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)=0
\end{aligned}$$

die drei Punktepaare $\alpha\beta$; $\alpha_1\beta_1$; $\alpha_2\beta_2$, von welchen der letzte Satz der vorhergehenden Vorlesung handelte. Das erste Punktepaar $\alpha\beta$ ist nämlich harmonisch mit $\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_3\lambda_4$, das zweite $\alpha_1\beta_1$ ist harmonisch mit $\lambda_2\lambda_3$ und $\lambda_1\lambda_4$, das dritte ist harmonisch mit $\lambda_3\lambda_1$ und $\lambda_2\lambda_4$.

Diese drei Gleichungen, welche unsymmetrisch sind in Rücksicht auf sämmtliche Wurzeln $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ der biquadratischen Gleichung (1), lassen sich einzeln rational nicht bilden, wenn man jene Wurzeln nicht kennt. Da aber durch beliebige Vertauschungen der vier Wurzeln die drei Gleichungen entweder ungeändert bleiben oder in einander übergehen, so wird das Produkt jener Gleichungen

$$(5)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ C=0$$

bei allen möglichen Vertauschungen der vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung ungeändert bleiben. Es wird C eine ganze Function des sechsten Grades in Rücksicht auf λ, eine ganze symmetrische Function der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (1) sein.

Die Algebra lehrt ganze symmetrische Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die Coefficienten in derselben rational ausdrücken. Denken wir uns nun die von der Algebra vorgeschriebenen Regeln auf den vorliegenden Fall angewendet, so erscheinen in der Entwickelung von:

$$(6)\ \ldots\ C=c_0\lambda^6+c_1\lambda^5+c_2\lambda^4+c_3\lambda^3+\ldots+c_6$$

Digitized by Google

die sieben Coefficienten c als bekannte rationale Ausdrücke der Coefficienten a in der gegebenen biquadratischen Gleichung. Wir werden deshalb, ohne die Rechnung durchzuführen, annehmen, dass die sieben Coefficienten c in der Gleichung (5), welche die drei Punktepaare $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ repräsentirt, ebenso bekannt seien wie die fünf Coefficienten a in der gegebenen biquadratischen Gleichung (1).

Wir gehen nun darauf aus, die nunmehr bekannte Gleichung (5) $C = 0$, das Produkt der drei Gleichungen (4), ohne die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (1) zu kennen, in die drei Gleichungen (4) zu zerlegen, die wir entwickelt so darstellen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda^2 - p\lambda + q &= 0 \\ \lambda^2 - p_1\lambda + q_1 &= 0 \\ \lambda^2 - p_2\lambda + q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dazu dient der Satz (24) der vorhergehenden Vorlesung, welcher aussagt, dass je zwei Punktepaare $\alpha\beta$; $\alpha_1\beta_1$; $\alpha_2\beta_2$ harmonisch sind und welcher algebraisch ausgedrückt drei Relationen zwischen den sechs Wurzeln der Gleichung (5) $C = 0$ giebt.

Um diese drei Relationen aufzustellen, bemerken wir, dass:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \alpha + \beta = p & \alpha_1 + \beta_1 = p_1 & \alpha_2 + \beta_2 = p_2 \\ \alpha\beta = q & \alpha_1\beta_1 = q_1 & \alpha_2\beta_2 = q_2, \end{array}$$

woraus sich sofort die drei Relationen ergeben:

$$(9) \quad \begin{aligned} q_1 - \tfrac{1}{2} p_1 p_2 + q_2 &= 0 \\ q_2 - \tfrac{1}{2} p_2 p + q &= 0 \\ q - \tfrac{1}{2} p p_1 + q_1 &= 0, \end{aligned}$$

welche eben ausdrücken, dass jedes der drei Punktepaare harmonisch ist mit jedem anderen von ihnen.

Die Verhältnisse der Coefficienten c in C sind die bekannten symmetrischen Functionen der sechs Wurzeln $\alpha\beta\ \alpha_1\beta_1\ \alpha_2\beta_2$ der Gleichung $C = 0$, welche sich nach (8) so ausdrücken lassen:

$$(10) \quad \begin{aligned} -\frac{c_1}{c_0} &= p + p_1 + p_2 \\ \frac{c_2}{c_0} &= p_1 p_2 + p_2 p + p p_1 + q + q_1 + q_2 \\ -\frac{c_3}{c_0} &= p p_1 p_2 + q(p_1 + p_2) + q_1(p_2 + p) + q_2(p + p_1). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Da man aber nach (9) hat:

$$\begin{aligned} 4q &= -p_1p_2 + p_2p + pp_1 \\ (11) \ldots\ldots\ 4q_1 &= \ \ p_1p_2 - p_2p + pp_1 \\ 4q_2 &= \ \ p_1p_2 + p_2p - pp_1, \end{aligned}$$

so kann man die vorhergehenden Gleichungen (10) bequemer so darstellen:

$$\begin{aligned} -\frac{c_1}{c_0} &= p + p_1 + p_2 \\ (12) \ldots\ \tfrac{4}{5}\frac{c_2}{c_0} &= p_1p_2 + p_2p + pp_1 \\ -\tfrac{2}{5}\frac{c_3}{c_0} &= p\,p_1\,p_2. \end{aligned}$$

Hieraus bilden wir nun die kubische Gleichung:

$$(13) \ldots\ c_0p^3 + c_1p^2 + \tfrac{4}{5}c_2p + \tfrac{2}{5}c_3 = 0,$$

deren Wurzeln die gesuchten Coefficienten $p\,p_1\,p_2$ in den quadratischen Gleichungen (7) sind.

Um den Coefficienten q bequem durch den ihm entsprechenden Coefficienten p auszudrücken, addiren wir die beiden aus (11) und (12) genommenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4q &= -p_1p_2 + p_2p + pp_1 \\ \tfrac{4}{5}\frac{c_2}{c_0} &= \ \ p_1p_2 + p_2p + pp_1, \end{aligned}$$

multipliciren mit $\frac{c_0}{2}$ wie folgt:

$$2c_0q + \tfrac{2}{5}c_2 = c_0p(p_1 + p_2)$$

und setzen für $p_1 + p_2$ den Werth aus der ersten Gleichung (12), wodurch wir erhalten:

$$2c_0q + \tfrac{2}{5}c_2 = -c_0p^2 - c_1p,$$

welche Gleichung mit Benutzung von (13) übergeht in:

$$(14) \ldots\ldots\ c_0q = \tfrac{1}{5}c_2 + \tfrac{1}{5}c_3\frac{1}{p}.$$

Wollten wir vermittelst dieser Gleichung p durch q ausdrücken und den Werth von p in die kubische Gleichung (13) einsetzen, so würden wir eine kubische Gleichung in q erhalten, deren Wurzeln die gesuchten Coefficienten q in den quadratischen Gleichungen (7) sind. Wir ziehen es jedoch vor, bei der einen

Digitized by Google

kubischen Gleichung (13) zu bleiben und die Coefficienten q der quadratischen Gleichungen (7) durch die ihnen entsprechenden Coefficienten p vermittelst (14) auszudrücken, welche die Wurzeln der kubischen Gleichung (13) sind.

Wir haben es auf diese Weise erreicht, dass wir durch Auflösung der kubischen Gleichung (13), deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Coefficienten der gegebenen biquadratischen Gleichung (1) sind, jede von den quadratischen Gleichungen (7) rational durch eine der drei Wurzeln der kubischen Gleichung darstellen können, ohne die Wurzeln λ der gegebenen biquadratischen Gleichung (1) selbst zu kennen. Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie daraus die Wurzeln der biquadratischen Gleichung gefunden werden.

Die erste quadratische Gleichung (7), deren Wurzeln α und β sind, repräsentirt, wenn wir setzen:

$$(15) \ldots\ A_0 - \alpha A_1 \equiv A; \quad A_0 - \beta A_1 \equiv B$$

das Punktenpaar α, β:

$$(16) \ldots\ A = 0; \quad B = 0.$$

Diese beiden Punkte führen wir nun als die Fundamentalpunkte an Stelle der früheren $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ ein, indem wir auf Grund von (15) setzen:

$$(17) \ldots\ A_0 \equiv \frac{\beta A - \alpha B}{\beta - \alpha}; \quad A_1 \equiv \frac{A - B}{\beta - \alpha}.$$

Dadurch geht die Gleichung (3) irgend eines Punktes auf der geraden Linie, auf welcher die Fundamentalpunkte liegen, über in die Gleichung:

$$(18) \ldots\ A - \mu B = 0,$$

indem man hat:

$$(19) \ldots\ \lambda = \frac{\beta\mu - \alpha}{\mu - 1}.$$

Durch Substitution des Werthes von λ aus (19) in die gegebene biquadratische Gleichung (1) transformiren wir nun letztere in eine in μ biquadratische Gleichung, bezogen auf die Fundamentalpunkte $\alpha\beta$.

Digitized by Google

In dieser nach Potenzen von μ entwickelten Gleichung fehlen die beiden Glieder, welche die ungeraden Potenzen als Factoren haben. Da nämlich das Punktepaar $\lambda_1 \lambda_2$ harmonisch ist mit dem Punktepaare $\alpha\beta$, so stellen sich die Gleichungen der ersten Punkte in der Form dar:

$$A - \mu_1 B = 0 \quad A + \mu_1 B = 0,$$

und ihr Produkt in der Form:

$$(20) \ldots\ldots\ldots \quad \mu^2 - \mu_1^2 = 0,$$

wenn man für $\frac{A}{B}$ nach (18) μ setzt.

Ebenso wird das mit $\alpha\beta$ harmonische Punktenpaar $\lambda_3 \lambda_4$ repräsentirt durch eine Gleichung von der Form:

$$(21) \ldots\ldots\ldots \quad \mu^2 - \mu_3^2 = 0.$$

Da aber das Produkt der Gleichungen (20) und (21) die vier Punkte der gegebenen biquadratischen Gleichung repräsentirt, so sieht man, dass die durch die Substitution von (19) transformirte biquadratische Gleichung die Form hat:

$$(22) \ldots\ldots\ldots \quad b_0 \mu^4 + b_2 \mu^2 + b_4 = 0.$$

Diese in μ^2 quadratische Gleichung wird man nun aufzulösen und ihre vier Wurzeln nach einander in (19) einzusetzen haben, um die gesuchten Wurzeln λ der gegebenen biquadratischen Gleichung (1) zu erhalten.

Die vier Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung (1) stellen sich auf diese Weise dar als Ausdrücke einer einzigen Wurzel der kubischen Gleichung (13), während man gewohnt ist, bei Auflösung biquadratischer Gleichungen alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung, auf welche das Problem zurückführt, gleichmässig zu verwenden. Wir lassen deshalb noch eine zweite Auflösungsart folgen.

In dieser Absicht drücken wir die bekannte Eigenschaft des Punktepaares $\alpha\beta$, dass es sowohl mit dem Punktepaare $\lambda_1 \lambda_2$ als mit dem Punktepaare $\lambda_3 \lambda_4$ harmonisch ist, durch die Gleichungen aus:

$$(23) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\, p + q &= 0 \\ \lambda_3 \lambda_4 - \tfrac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4)\, p + q &= 0. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Durch Addition erhalten wir:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = -\tfrac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}p - 2q,$$

und wenn wir für q seinen Werth (14) setzen:

$$(24)\ \ldots\quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = -\tfrac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}p - \tfrac{2}{5}\cdot\frac{c_2}{c_0} - \tfrac{2}{5}\cdot\frac{c_3}{c_0}\cdot\frac{1}{p}.$$

Wir haben ferner die Werthe der symmetrischen Functionen:

$$(25)\ \ldots\quad \begin{aligned}&\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}\\ &-2\left\{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots\lambda_3\lambda_4\right\} = -\frac{2a_0a_2}{a_0^2}.\end{aligned}$$

Multipliciren wir nun die Gleichung (24) mit 4 und addiren sie zu (25), so wird die Summe:

$$\left\{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\right\}^2 = 16\left\{e'p + e_0 + e_1\frac{1}{p}\right\},$$

wenn wir, um abzukürzen, setzen:

$$(26)\ \ldots\ldots\quad \begin{aligned}16e' &= -2\cdot\frac{a_1}{a_0}\\ 16e_0 &= -\tfrac{8}{5}\frac{c_2}{c_0} + \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{a_0^2}\\ 16e_1 &= -\tfrac{8}{5}\frac{c_3}{c_0}\end{aligned}$$

und daher:

$$(27)\ \ldots\quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 4\sqrt{\left\{e'p + e_0 + e_1\frac{1}{p}\right\}}.$$

Wir stellen nun die Gleichungen zusammen, deren Summe oder Differenz die Wurzeln λ der biquadratischen Gleichung (1) geben:

$$(28)\ \ldots\quad \begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= -4\cdot\frac{a_1}{4a_0}\\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &= 4\sqrt{\left\{e'p + e_0 + e_1\frac{1}{p}\right\}}\\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 4\sqrt{\left\{e'p_1 + e_0 + e_1\frac{1}{p_1}\right\}}\\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 4\sqrt{\left\{e'p_2 + e_0 + e_1\frac{1}{p_2}\right\}}.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist der bekannte Ausdruck für die Summe der Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung (1). Die zweite Gleichung, aus (27) genommen, ging aus der Betrachtung des Punktepaares $\alpha\beta$ hervor, welches der Wurzel p der kubischen Gleichung entspricht. Ebenso gehen die beiden letzten

Digitized by Google

Gleichungen aus der Betrachtung der Punktenpaare $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ hervor, welche den beiden letzten Wurzeln p_1 und p_2 der kubischen Gleichung entsprechen.

Ganz willkürlich sind die Vorzeichen der drei Quadratwurzelgrössen in (28) nicht. Denn man erhielte eben acht Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung (1), wenn man die Vorzeichen beliebig wählen wollte. Es bleibt daher noch übrig, die Wahl der Vorzeichen durch eine geeignete Bedingung einzuschränken.

Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass, wenn wir die drei letzten Gleichungen (28) mit einander multipliciren, das Produkt auf der linken Seite der resultirenden Gleichung eine symmetrische Function der Wurzeln der biquadratischen Gleichung ist, die sich durch die Coefficienten der Gleichung rational ausdrücken lässt. Bezeichnen wir nun diesen Ausdruck, dessen Vorzeichen unzweifelhaft ist, mit D, so haben wir die gesuchte Bedingung:

$$(29)\quad D=64\sqrt{\left\{e'p+e_0+e_1\frac{1}{p}\right\}}\sqrt{\left\{e'p_1+e_0+e_1\frac{1}{p_1}\right\}}\sqrt{\left\{e'p_2+e_0+e_1\frac{1}{p_2}\right\}},$$

nach welcher das Vorzeichen einer Quadratwurzel bestimmt wird durch die beiden anderen, welche willkürlich bleiben.

Es kann genügen, in dem Vorhergehenden die Möglichkeit der Auflösung der biquadratischen Gleichung nach der kubischen Gleichung auf dem vorgezeichneten Wege eingesehen zu haben. Der wirklichen Ausführung stellt sich die Schwierigkeit entgegen, die symmetrische Function C in (6) der Wurzeln der biquadratischen Gleichung durch die Coefficienten in der letzteren auszudrücken. Diese Schwierigkeit lässt sich auf dem gewöhnlichen Wege nur durch unerquickliche Rechnungen überwinden. Da es aber doch interessant ist, zu sehen, wie unsere Auflösung der biquadratischen Gleichung (1) übereinstimmt mit der bekannten Auflösung in dem Falle, wo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ist, so geben wir die Werthe der vier ersten Coefficienten c in der Gleichung $C = 0$ für den angegebenen Fall ohne Beweis:

$$(30)\quad \begin{array}{ll} c_0 = \frac{a_3}{4} & c_2 = -\frac{5}{8}a_2a_3 \\ c_1 = \frac{4a_4 - a_2^2}{4} & c_3 = -\frac{5}{8}a_3^2\ *). \end{array}$$

*) Wenn man in dem linken Theile der biquadratischen Gleichung (1) für λ setzt $\frac{x}{y}$ und mit y^4 multiplicirt, so erhält man eine homogene

Digitized by Google

Setzt man diese Werthe der Coefficienten c in die kubische Gleichung (13), so erhält man:

$$(31) \ldots \quad -a_3 p^3 + (a_2^2 - 4a_4) p^2 + 2a_2 a_3 p + a_3^2 = 0.$$

Es wird ferner, da $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ aus (25):

$$(32) \ldots \ldots \quad e' = 0, \quad e_0 = 0, \quad e_1 = \frac{a_3}{4},$$

und wenn man setzt:

$$(33) \ldots \ldots \ldots \quad p = \frac{a_3}{4P},$$

so geht die kubische Gleichung (31) über in:

$$(34) \ldots \quad P^3 + \frac{a_2}{2} P^2 + \frac{a_2^2 - 4a_4}{16} P - \frac{a_3^2}{64} = 0,$$

während die Gleichungen (28) die Gestalt erhalten:

$$(35) \ldots \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &= 4\sqrt{P} \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 4\sqrt{P_1} \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 4\sqrt{P_2}, \end{aligned}$$

indem P P_1 P_2 die Wurzeln der kubischen Gleichung (34) bedeuten.

Dieses sind die bekannten Auflösungen der gegebenen biquadratischen Gleichung (1), wenn $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Function u der Variabeln x, y vom vierten Grade. Bezeichnet man hierauf mit v und w die Ausdrücke:

$$v = \frac{1}{16}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2u}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy}\right\}$$

$$w = \frac{1}{8}\left\{\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right\},$$

so wird, wenn man setzt $x = \lambda$, $y = 1$; $w = 0$ gerade die Gleichung $C = 0$ selbst in dem allgemeinen Falle, wenn die fünf Coefficienten a in der biquadratischen Gleichung (1) irgend welche Werthe haben.

Aus der so gebildeten Gleichung $w = 0$ sind jene Werthe (30) der fünf Coefficienten c berechnet. Crelles Journal Bd. 52. p. 4.

Den Beweis zu geben beabsichtiget diese Anmerkung nicht. Sie soll nur dienen neben dem Hinweis auf neuere Untersuchungen als Controlle der Rechnung.

Digitized by Google

Um die Vorzeichen der drei Quadratwurzeln richtig zu beschränken, diente die Gleichung (29), in welcher D das Produkt der linken Theile der drei letzten Gleichungen (28) oder (35) bedeutet. Setzt man für die negativen Glieder in jedem dieser drei Factoren von D die entsprechenden positiven Glieder vermittelst der ersten Gleichung (35), so wird:

$$D = 8\ (\lambda_1 + \lambda_2)\ (\lambda_1 + \lambda_3)\ (\lambda_1 + \lambda_4),$$

und nach Potenzen von λ_1 entwickelt:

$$\frac{D}{8} = \lambda_1^3 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\ \lambda_1^2 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)\ \lambda_1 + \lambda_2\lambda_3\ \lambda_4.$$

Da nun die Summe der beiden ersten Glieder der Entwickelung nach der ersten Gleichung (35) verschwindet, so haben wir:

$$\frac{D}{8} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2 = -a_2,$$

und die Gleichung (29) geht über in:

$$(36) \ldots\ldots\ldots -\frac{a_2}{8} = \sqrt{P}\ \sqrt{P_1}\ \sqrt{P_2}.$$

Achte Vorlesung.

Linienpaare und Punktepaare.

Nachdem wir in den vorhergehenden Vorlesungen Liniensysteme und Punktesysteme betrachtet haben, von welchen jede gerade Linie und jeder Punkt durch seine Gleichung analytisch ausgedrückt wurde, so haben wir in der sechsten Vorlesung den Anfang gemacht, Punktepaare und Linienpaare, jedes Paar durch eine Gleichung darzustellen. Man wird den Vortheil der neuen Ausdrucksweise nicht für gering achten, wenn man sich die daraus gezogenen Resultate der letzten Vorlesungen vergegenwärtigt.

Um aus der genannten Ausdrucksweise weiteren Vortheil zu ziehen, nimmt diese Vorlesung denselben Gegenstand zur ausführlichen Discussion wieder auf. Es werden sich bei dieser Ge-

Digitized by Google

legenheit dieselben Fragen freilich wieder erheben, welche wir bereits beantwortet haben. Da aber die Voraussetzungen hier eben andere sind, so werden auch die Antworten darauf ein ganz anderes Gewand tragen, in welchem sie den früheren wenig ähnlich sehen. Doch das ist eben das Wesen der Mathematik, dass sie zeigt, was gleich ist, so verschieden es auch in der Form sei, und was ungleich ist. Hätten wir ein bewiesenes Criterium dafür, was gleich ist, was ungleich, so brauchten wir nur die Resultate dieser Vorlesung niederzulegen; die Beweise würden sich aus jenem Criterium von selbst ergeben.

Wir wiederholen, dass das Produkt der Gleichungen von zwei geraden Linien das Linienpaar, und dass das Produkt der Gleichungen von zwei Punkten das Punktepaar analytisch darstellt. Diese Gleichungen sind entwickelt von der Form:

$$(1) \ldots \quad a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + 2a_{02}x + 2a_{12}y + a_{22} = 0.$$

$$(2) \ldots \quad a_{00}u^2 + 2a_{01}uv + a_{11}v^2 + 2a_{02}u + 2a_{12}v + a_{22} = 0.$$

Es werden aber nicht alle Gleichungen von dieser Form Linienpaare oder Punktepaare darstellen. Die Bedingung, dass sie Linienpaare oder Punktepaare ausdrücken, ist, dass die Ausdrücke zweiter Ordnung links von dem Gleichheitszeichen sich in lineare Factoren zerlegen lassen. Welches auch die linearen Factoren seien, in welche der Ausdruck (1) links vom Gleichheitszeichen zerfällt, das Produkt wird immer die Form annehmen können:

$$(3) \ldots \quad \lambda\,(u_0x + v_0y + 1)\,(u_1x + v_1y + 1).$$

Soll aber dieses Produkt jenem Ausdrucke (1) gleich sein, so müssen die Coefficienten der Potenzen und Produkte der Variabeln in (1) den entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung des Produktes gleich sein. Setzen wir die einen den anderen gleich, so erhalten wir sechs Gleichungen zwischen den fünf Unbekannten $\lambda\ u_0\ v_0\ u_1\ v_1$. Fünf von diesen Gleichungen bestimmen die fünf Unbekannten. Setzen wir die Werthe derselben in die sechste Gleichung, so erhalten wir die Bedingung zwischen den Coefficienten in (1), welche erfüllt sein muss, wenn jene Gleichung (1) ein Linienpaar darstellen soll. Wir können uns daher die Aufgabe stellen:

Digitized by Google

Die Bedingungsgleichung zwischen den sechs Coefficienten a in der Gleichung (1) oder (2) zu finden, welche erfüllt sein muss, wenn diese Gleichungen ein Linienpaar oder ein Punktepaar darstellen sollen.

Zu diesem Zwecke vertheilen wir die oben erwähnten sechs Gleichungen in drei Systeme von drei Gleichungen:

$$a_{00}=\frac{\lambda}{2}(u_1u_0+u_0u_1) \quad a_{01}=\frac{\lambda}{2}(v_1u_0+v_0u_1) \quad a_{02}=\frac{\lambda}{2}(u_0+u_1)$$
$$a_{01}=\frac{\lambda}{2}(u_1v_0+u_0v_1) \quad a_{11}=\frac{\lambda}{2}(v_1v_0+v_0v_1) \quad a_{12}=\frac{\lambda}{2}(v_0+v_1)$$
$$a_{02}=\frac{\lambda}{2}(u_1+u_0) \quad a_{12}=\frac{\lambda}{2}(v_1+v_0) \quad a_{22}=\frac{\lambda}{2}(1+1).$$

Bezeichnen wir nun mit x_1 und y_1 die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die beiden durch (1) dargestellten geraden Linien schneiden, so haben wir:

$$u_0x_1+v_0y_1+1=0$$
$$u_1x_1+v_1y_1+1=0.$$

Multipliciren wir hierauf die Gleichungen jedes der drei Systeme der Reihe nach mit x_1 y_1 1 und addiren, so erhalten wir mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{00}x_1+a_{01}y_1+a_{02}&=0\\ a_{01}x_1+a_{11}y_1+a_{12}&=0\\ a_{02}x_1+a_{12}y_1+a_{22}&=0, \end{aligned} \tag{4}$$

woraus durch Elimination von x_1 und y_1 die gesuchte Bedingungsgleichung hervorgeht:

$$a_{00}a_{11}a_{22}+2a_{01}a_{02}a_{12}-a_{00}a_{12}^2-a_{11}a_{02}^2-a_{22}a_{01}^2=0. \tag{5}$$

Der Ausdruck (3) ändert nur seine Form, wenn man in ihm von dem ersten linearen Factor den Ausdruck $u_0x_1+v_0y_1+1=0$ und von dem zweiten linearen Factor den Ausdruck $u_1x_1+v_1y_1+1=0$ abzieht. Dadurch nimmt er aber die Gestalt an:

$$\lambda\left\{u_0(x-x_1)+v_0(y-y_1)\right\}\left\{u_1(x-x_1)+v_1(y-y_1)\right\}.$$

Ersetzt man in der Entwickelung dieses Ausdruckes nach den Differenzen $x-x_1$ und $y-y_1$ die schon erwähnten 5 Unbekannten mittelst der obigen drei Systeme Gleichungen durch die

Digitized by Google

Coefficienten in (1) und bemerkt, dass dieser Ausdruck dem Ausdrucke (1) links vom Gleichheitszeichen äquivalent ist, so sieht man, dass unter der Bedingung (5), welche sagt, dass die Gleichung (1) ein Linienpaar darstelle, diese Gleichung (1) sich auf die Form zurückführen lässt:

$$a_{00}(x-x_1)^2 + 2a_{01}(x-x_1)(y-y_1) + a_{11}(y-y_1)^2 = 0.$$

Da die Gleichung (2) unter der Bedingung (5) eine ähnliche Umformung zulässt, so können wir kurz sagen:

Wenn die Gleichungen (1) und (2) respective ein Linienpaar oder ein Punktepaar darstellen, was unter der Bedingung (5) immer zutrifft, so lassen sich diese Gleichungen auf die Form zurückführen:

$$(6) \ldots \quad a_{00}(x-x_1)^2 + 2a_{01}(x-x_1)(y-y_1) + a_{11}(y-y_1)^2 = 0$$

$$(7) \ldots \quad a_{00}(u-u_1)^2 + 2a_{01}(u-u_1)(v-v_1) + a_{11}(v-v_1)^2 = 0.$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Grössen x_1 und y_1, die durch zwei von den Gleichungen (4) definirt sind, die Coordinaten des Schnittpunktes der beiden Linien (1), und u_1 und v_1 die Coordinaten der geraden Linie, welche durch das Punktepaar (2) geht und welche sich aus irgend zwei von den folgenden drei Gleichungen berechnen lassen:

$$(8) \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} a_{00}u_1 + a_{01}v_1 + a_{02} &= 0 \\ a_{01}u_1 + a_{11}v_1 + a_{12} &= 0 \\ a_{02}u_1 + a_{12}v_1 + a_{22} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Den Winkel v zu bestimmen, welcher von dem durch die Gleichung (1) unter der Bedingung (5) gegebenen Linienpaar gebildet wird.

Wählen wir für die linearen Factoren, in welche der Ausdruck der zweiten Ordnung links vom Gleichheitszeichen in (1) zerfällt, ihre Normalformen, so können wir für den Ausdruck (3) auch setzen:

$$\mu(x\cos\alpha + y\cos\beta - \delta)(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 - \delta_1)$$

und wir haben:

$$a_{00} = \mu\cos\alpha\cos\alpha_1 \quad 2a_{01} = \mu(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\beta\cos\alpha_1)$$
$$a_{11} = \mu\cos\beta\cos\beta_1.$$

Digitized by Google

Addiren wir die erste und die letzte von diesen Gleichungen, so wird:

$$a_{00} + a_{11} = \mu \cos v.$$

Quadriren wir die zweite Gleichung und ziehen das vierfache Produkt der ersten und dritten Gleichung ab, so erhalten wir:

$$4\,(a_{01}^2 - a_{00}\,a_{11}) = \mu^2\,(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta)^2$$

oder:

$$2\,V(a_{01}^2 - a_{00}\,a_{11}) = \mu \sin v.$$

Aus den gefundenen Werthen von $\cos v$ und $\sin v$ setzen wir nun die Tangente des gesuchten Winkels zusammen:

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tang} v = 2\,\frac{V(a_{01}^2 - a_{00}\,a_{11})}{a_{00} + a_{11}}.$$

Da $v = 0$ ist, wenn $a_{01}^2 - a_{00}\,a_{11} = 0$, und $v = \frac{\pi}{2}$, wenn $a_{00} + a_{11} = 0$, so können wir dieses auch so ausdrücken:

Die Gleichung (1) stellt unter der Bedingung (5) ein paralleles Linienpaar dar, wenn $a_{01}^2 - a_{00}\,a_{11} = 0$.

Wenn in der Gleichung eines Linienpaares die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 verschwindet, so stehen die geraden Linien auf einander senkrecht.

Sind zwei Linienpaare, die von demselben Punkte $x_1\,y_1$ ausgehen, gegeben durch ihre Gleichungen:

$$(10) \ldots \quad a_{00}(x-x_1)^2 + 2\,a_{01}(x-x_1)(y-y_1) + a_{11}(y-y_1)^2 = 0$$

$$(11) \ldots \quad b_{00}(x-x_1)^2 + 2\,b_{01}(x-x_1)(y-y_1) + b_{11}(y-y_1)^2 = 0,$$

so nehmen diese Gleichungen die Form der Gleichungen (1) und (2) in der sechsten Vorlesung an, wenn man setzt $x - x_1 = V_0$ und $y - y_1 = V_1$. Die dort angegebene Bedingungsgleichung (3) für harmonische Linienpaare überträgt sich hier wie folgt:

Die Linienpaare (10) und (11) sind harmonisch unter der Bedingung:

$$(12) \ldots\ldots \quad a_{00}\,b_{11} - 2\,a_{01}\,b_{01} + a_{11}\,b_{00} = 0.$$

Sollen die durch (11) ausgedrückten geraden Linien auf einander senkrecht stehen, so muss sein:

Digitized by Google

$$b_{00} + b_{11} = 0$$

und beide Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn das Linienpaar (11) die Winkel halbirt, welche das Linienpaar (10) bildet. Berechnen wir nun die Verhältnisse der Coefficienten b aus den beiden Bedingungsgleichungen und setzen ihre Werthe in (11) ein, so ergiebt sich das Resultat:

Die von dem Linienpaare (10) gebildeten Winkel werden halbirt von dem Linienpaare:

$$(13) \quad \ldots \quad (x - x_1)^2 - \frac{(a_{00} - a_{11})}{a_{01}} (x - x_1)(y - y_1) - (y - y_1)^2 = 0.$$

Aus dem Umstande, dass diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn man für a_{00} und a_{11} respective setzt $a_{00} - \lambda$ und $a_{11} - \lambda$, schliessen wir Folgendes:

Alle Linienpaare, deren Winkel von denselben beiden geraden Linien halbirt werden, stellen sich analytisch, mit dem willkürlichen Factor λ, in der Form dar:

$$(14) \quad \ldots \quad \begin{aligned} &a_{00}(x - x_1)^2 + 2a_{01}(x - x_1)(y - y_1) + a_{11}(y - y_1)^2 \\ &\quad - \lambda\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Wir erweitern den angegebenen Satz, wenn wir sagen:

Alle Linienpaare, welche harmonisch sind mit einem bestimmten Linienpaare, stellen sich analytisch, mit dem willkürlichen Factor λ, in der Form dar:

$$(15) \quad \begin{aligned} &a_{00}(x - x_1)^2 + 2a_{01}(x - x_1)(y - y_1) + a_{11}(y - y_1)^2 \\ &-\lambda\left\{b_{00}(x - x_1)^2 + 2b_{01}(x - x_1)(y - y_1) + b_{11}(y - y_1)^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Je drei solcher Linienpaare bilden nach der Definition eine Involution. Ihre Gleichungen unterscheiden sich von der Gleichung (15) nur durch die Werthe $\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2$, welche der willkürliche Factor λ annimmt.

Welches auch die Werthe von $\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2$ seien, man wird drei Constanten $c_0\ c_1\ c_2$ der Art bestimmen können, dass:

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0$$
$$c_0\lambda_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0.$$

Digitized by Google

Multiplicirt man nun die Gleichungen der drei Linienpaare mit $c_0\, c_1\, c_2$ und addirt, so sieht man, dass auf Grund der eben angegebenen beiden Gleichungen die Summe identisch 0 wird, was nach Satz (8) der sechsten Vorlesung, der, wie dort angegeben, ebenso für Linienpaare als für Punktepaare gilt, eben das Criterium ist für drei Linienpaare der Involution.

Betrachten wir als speciellen Fall von (14) Linienpaare, welche von dem Coordinatenanfangspunkt ausgehen und deren Winkel von denselben beiden geraden Linien halbirt werden:

$$(16) \ldots \quad a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 - \lambda(x^2 + y^2) = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung des genannten Halbirungspaares aus (13), wenn wir in dieser Gleichung $x_1 = y_1 = 0$ setzen. Es ist aber bisweilen nützlich, auch die Gleichung jeder einzelnen Halbirungslinie zu kennen. Um diese kennen zu lernen, bemerken wir, dass die Gleichung (16) eine von den Halbirungslinien doppelt darstellt, wenn der Ausdruck (16) links vom Gleichheitszeichen ein vollständiges Quadrat wird, mit anderen Worten, wenn man identisch hat:

$$(a_{00} - \lambda)\, x^2 + 2a_{01}xy + (a_{11} - \lambda)\, y^2 \equiv (ax + by)^2.$$

Diese identische Gleichung bedingt folgende drei Gleichungen:

$$a_{00} - \lambda = a^2 \quad a_{01} = ab \quad a_{11} - \lambda = b^2,$$

aus welchen wieder die beiden identischen Gleichungen hervorgehen:

$$(a_{00} - \lambda)\, x + a_{01}y \equiv a\,(ax + by)$$
$$a_{01}x + (a_{11} - \lambda)\, y \equiv b\,(ax + by).$$

Bemerken wir nun, dass $ax + by = 0$ die Gleichung der Halbirungslinie des einen Winkels ist, so sehen wir aus den letzten identischen Gleichungen, dass diese Halbirungslinie sich durch zwei Gleichungen:

$$(17) \ldots \ldots \quad \begin{aligned} (a_{00} - \lambda)\, x + a_{01}y &= 0 \\ a_{10}x + (a_{11} - \lambda)\, y &= 0 \end{aligned}$$

gleichmässig ausdrücken lässt, woraus wiederum folgt, dass der Werth von λ, welcher die linke Seite der Gleichung (16) zu einem vollständigen Quadrat macht, der aus der Elimination von x und y aus (17) hervorgehenden Gleichung genügen muss:

$$(18) \ldots \quad (a_{00} - \lambda)\,(a_{11} - \lambda) - a_{01}^2 = 0.$$

Digitized by Google

Diese quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, welche, für λ in (16) eingesetzt, den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in ein vollständiges Quadrat verwandeln.

Sind λ_0 und λ_1 die Wurzeln der quadratischen Gleichung (18), so hat man die Gleichung der Halbirungslinien der Winkel:

$$(a_{00} - \lambda_0)\, x + a_{01} y = 0 \quad (a_{00} - \lambda_1)\, x + a_{01} y = 0,$$

oder in einer zweiten Form:

$$a_{01} x + (a_{11} - \lambda_0)\, y = 0 \quad a_{01} x + (a_{11} - \lambda_1)\, y = 0.$$

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen oder die beiden letzten Gleichungen und drückt in der Entwickelung des Produktes die Summe und das Produkt der Wurzeln durch die Coefficienten in der Gleichung (18) aus, so erhält man wieder die Gleichung (13), in welcher $x_1 = y_1 = 0$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass der Ausdruck:

$$(a_{00} + a_{11})^2 - 4(a_{00} a_{11} - a_{01}^2),$$

welcher bei Auflösung der quadratischen Gleichung (18) unter das Quadratwurzelzeichen zu stehen kommt, immer positiv ist, weil er die Summe von zwei Quadraten ist:

$$4 a_{01}^2 + (a_{00} - a_{11})^2.$$

Deshalb sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (18) immer reell und mit ihnen die zuletzt angegebenen Gleichungen der einzelnen Winkelhalbirungslinien, gleichviel, ob die Gleichung (16) in reelle oder imaginäre Factoren zerfällt. Dieses drücken wir so aus:

Jedes Paar selbst imaginärer gerader Linien, dessen Gleichung von reeller Form ist, hat ein Paar reelle Winkelhalbirungslinien.

Die entsprechenden Aufgaben für Punktepaare, welche wir für Linienpaare gelöset haben, verlangen eine etwas verschiedene Behandlung. Es existirt eben nicht eine vollständige Analogie zwischen Punkten und geraden Linien in der Ebene. Die vollständige Analogie besteht auf der Kugeloberfläche zwischen Punkt und grösstem Kreis, und nur, weil ein unendlich kleiner Theil der Kugeloberfläche als eine Ebene und der grösste Kreis in ihr als eine gerade Linie betrachtet werden kann, haben wir auch eine Analogie zwischen Punkt und gerader Linie in der Ebene,

Digitized by Google

die aber aufhört, wenn die Ebene in ihrer weiteren Ausdehnung sich nicht mehr als ein kleiner Theil der Kugeloberfläche betrachten lässt. Die erwähnte Verschiedenheit tritt schon bei der folgenden Aufgabe zu Tage.

Die Entfernung D der beiden Punkte zu bestimmen, welche durch die Gleichung (2) unter der Bedingung (5) gegeben sind.

Sind $a\,b$ und $a_1\,b_1$ die Coordinaten der durch die Gleichung (2) gegebenen Punkte, so muss sich der linke Theil der Gleichung (2) in die Factoren auflösen lassen:

$$\lambda\,(au + bv + 1)\,(a_1 u + b_1 v + 1).$$

Daraus ergeben sich die sechs Gleichungen:

$$a_{00} = \lambda a a_1 \qquad 2a_{01} = \lambda(a b_1 + a_1 b) \qquad a_{11} = \lambda b b_1$$
$$2a_{02} = \lambda(a + a_1) \qquad 2a_{12} = \lambda\,(b + b_1) \qquad a_{22} = \lambda.$$

Aus diesen Gleichungen setzen sich nun ohne Schwierigkeit die folgenden zusammen:

$$4\,(a_{01}^2 - a_{00}a_{11}) = \lambda^2(a b_1 - a_1 b)^2$$
$$4\,(a_{02}^2 - a_{00}a_{22}) = \lambda^2\,(a - a_1)^2$$
$$4\,(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = \lambda^2\,(b - b_1)^2.$$

Bemerkt man nun, dass $D^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2$ und $\lambda = a_{22}$, so erhält man aus den beiden letzten Gleichungen durch Addition:

$$(19)\ \ldots\quad D^2 = \frac{4}{a_{22}^2}\left\{(a_{02}^2 - a_{00}a_{22}) + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\right\}.$$

Auch die erste von den drei Gleichungen ist einer geometrischen Deutung fähig. Bezeichnet man nämlich mit Δ den Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die gegebenen Punkte (2) und der Coordinatenanfangspunkt sind, so erhält man aus jener Gleichung:

$$(20)\ \ldots\ldots\ \Delta = \frac{1}{a_{22}}\sqrt{(a_{01}^2 - a_{00}a_{11})}.$$

Beide Formeln beweisen den Satz:

Wenn in der Gleichung eines Punktepaares das ganz constante Glied verschwindet, so liegt einer der beiden Punkte im Unendlichen.

Digitized by Google

Aus der ersten Formel folgt ferner, dass die durch die Gleichung (2) gegebenen Punkte unter der Bedingung $(a_{02}^2 - a_{00}a_{22}) + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0$ zusammenfallen.

Die letzte Formel beweiset, dass die Verbindungslinie der durch die Gleichung (2) gegebenen Punkte durch den Coordinatenanfangspunkt geht, wenn $a_{01}^2 - a_{00}a_{11} = 0$.

Die Gleichungen von zwei Punktepaaren auf derselben geraden Linie, deren Coordinaten u_1 v_1 sind:

$$(21) \ldots a_{00}(u-u_1)^2 + 2a_{01}(u-u_1)(v-v_1) + a_{11}(v-v_1)^2 = 0,$$

$$(22) \ldots b_{00}(u-u_1)^2 + 2b_{01}(u-u_1)(v-v_1) + b_{11}(v-v_1)^2 = 0,$$

werden von der Form der Gleichungen (1) und (2) in der sechsten Vorlesung, wenn man setzt $u - u_1 = V_0$ und $v - v_1 = V_1$. Die dort unter (3) aufgeführte Bedingung für harmonische Punktepaare überträgt sich hier wie folgt:

Zwei Punktepaare (21) und (22) auf derselben geraden Linie sind harmonisch unter der Bedingung:

$$(23) \ldots\ldots a_{00}b_{11} - 2a_{01}b_{01} + a_{11}b_{00} = 0.$$

Von dem Punktepaare (22) liegt ein Punkt im Unendlichen, wenn:

$$b_{00}u_1^2 + 2b_{01}u_1v_1 + b_{11}v_1^2 = 0.$$

Wenn beide Bedingungen zugleich erfüllt werden, so halbirt der eine von den Punkten (22) die Verbindungslinie der beiden durch die Gleichung (21) gegebenen Punkte. Berechnet man daher die Verhältnisse der drei Coefficienten b aus den beiden Gleichungen und setzt sie in die Gleichung (22), so erhält man die Gleichung desjenigen Punktepaares, von welchem der eine Punkt die Verbindungslinie des Punktepaares (21) halbirt, der andere auf dieser Linie im Unendlichen liegt. Daraus schliessen wir, dass die so erhaltene Gleichung sich in zwei Factoren zerlegen lassen muss, von welchen der eine $(uv_1 - u_1v)$ sein wird. Denn setzt man diesen Factor gleich 0, so hat man die Gleichung des genannten Punktes im Unendlichen. Lässt man diesen Factor fort, so erhält man die Gleichung des Punktes, der jene Verbindungslinie halbirt, wie sie der folgende Satz angiebt:

Digitized by Google

Die Verbindungslinie des durch die Gleichung (21) gegebenen Punktepaares wird durch den Punkt halbirt, dessen Gleichung ist:

$$(24)\quad a_{00}u_1(u-u_1)+a_{01}\left\{v_1(u-u_1)+u_1(v-v_1)\right\}+a_{11}v_1(v-v_1)=0.$$

Die Bemerkung, dass diese Gleichung (24) ungeändert bleibt, wenn man für $a_{00}\ a_{01}\ a_{11}$ respective setzt $a_{00}-\lambda v_1^2$, $a_{01}+\lambda u_1 v_1$, $a_{11}-\lambda u_1^2$ dient als Beweis des folgenden Satzes:

Alle Punktepaare auf derselben geraden Linie, deren Verbindungslinien von einem und demselben Punkte halbirt werden, stellen sich analytisch mit dem willkürlichen Factor λ in der Form dar:

$$(25)\ \ldots\quad \begin{array}{l} a_{00}(u-u_1)^2+2a_{01}(u-u_1)(v-v_1) \\ +a_{11}(v-v_1)^2-\lambda(uv_1-u_1v)^2=0. \end{array}$$

Als eine Erweiterung dieses Satzes ist der folgende zu bezeichnen:

Alle Punktepaare auf derselben geraden Linie, welche harmonisch sind mit einem bestimmten Punktepaare, stellen sich analytisch mit dem willkürlichen Factor λ in der Form dar:

$$(26)\quad \begin{array}{l} a_{00}(u-u_1)^2+2a_{01}(u-u_1)(v-v_1)+a_{11}(v-v_1)^2 \\ -\lambda\left\{b_{00}(u-u_1)^2+2b_{01}(u-u_1)(v-v_1)+b_{11}(v-v_1)^2\right\}=0. \end{array}$$

Der Beweis ist gleich dem des obigen entsprechenden Satzes, welcher von der Gleichung (15) handelte.

Neunte Vorlesung.

Homogene Coordinaten. Dreieckcoordinaten.

Wenn $A_0=0$ und $A_1=0$ die Gleichungen zweier durch ihre Coordinaten x_0, y_0 und x_1, y_1 gegebenen Punkte in der Normalform sind, so stellt die Gleichung:

$$A_0-\lambda A_1=0$$

Digitized by Google

mit dem willkürlichen Factor λ jeden beliebigen Punkt dar auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte. Bringt man die letzte Gleichung auf die Normalform durch Division mit dem Factor $(1 - \lambda)$, um von der Gleichung dieses Punktes zu seinen Coordinaten x, y überzugehen, welche nach der Division die Coefficienten der Variabeln sind, so hat man:

$$x = \frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda} \qquad y = \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda}.$$

Wir wollen beiläufig bemerken, dass durch Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen mit Rücksicht auf (3) der ersten Vorlesung man die Gleichung $2\Delta = 0$ der geraden Linie erhalten muss, welche durch die gegebenen beiden Punkte geht.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer geraden Linie stellen sich hiernach als Brüche dar mit demselben Nenner, deren Zähler und Nenner lineare Ausdrücke einer Variabele λ sind.

Analoge Ausdrücke kann man erhalten für die Coordinaten einer geraden Linie, welche beliebig durch den Schnittpunkt zweier durch ihre Coordinaten gegebenen geraden Linien gelegt ist. Auch diese Ausdrücke sind lineare Brüche mit gleichem Nenner.

Die Rechnung mit Brüchen der angegebenen Art vermeidet man aber in dem ersten Falle durch Einführung der homogenen Coordinaten x, y, z eines Punktes an Stelle der rechtwinkligen. Wir werden zu diesem Zwecke irgend drei Grössen x, y, z, deren Verhältnisse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ die gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ausdrücken, die homogenen Coordinaten, oder auch bloss die Coordinaten des Punktes nennen.

Die gegebenen homogenen Coordinaten eines Punktes bestimmen hiernach den Punkt zwar unzweideutig, aber durch den gegebenen Punkt sind seine homogenen Coordinaten x, y, z nicht bestimmt, sondern nur die Verhältnisse derselben $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Sie stellen denselben Punkt dar, wenn ihre Verhältnisse ungeändert bleiben. Es giebt also unendlich viele Systeme homogener Coordinaten x, y, z, welche einen und denselben Punkt darstellen; ihre Verhältnisse ändern sich jedoch nicht für einen und denselben Punkt.

Digitized by Google

Durch Einführung der homogenen Coordinaten an Stelle der rechtwinkligen wird die Gleichung einer geraden Linie:

$$Ax + By + C = 0,$$

wenn man für x und y setzt $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und mit z multiplicirt, homogen:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Da aber die homogene Gleichung einer geraden Linie übergeht in die allgemeine Form der Gleichung der geraden Linien, wenn man in ihr $z = 1$ setzt, so leuchtet es ein, dass man mit den homogenen Gleichungen von geraden Linien ebenso operiren kann, wie mit den allgemeinen Gleichungen der geraden Linien.

Sind zum Beispiel die Gleichungen von vier geraden Linien in der homogenen Form gegeben:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \quad U_0 - \lambda U_1 = 0 \quad U_0 - \mu U_1 = 0,$$

so schneiden sich die diesen Gleichungen entsprechenden geraden Linien in einem Punkte, und das anharmonische Verhältniss des zweiten Linienpaares zu dem ersten ist $\frac{\lambda}{\mu}$, weil ganz dasselbe zutrifft, wenn man $z = 1$ setzt.

Gleichzeitig drücken wir die Lage einer geraden Linie durch homogene Liniencoordinaten aus. Wir verstehen darunter drei Grössen u, v, w, deren Verhältnisse $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ die gebräuchlichen Coordinaten der geraden Linie sind. Alsdann wiederholt sich das, was wir von Punktcoordinaten und homogenen Punktcoordinaten gesagt haben, bei Liniencoordinaten und homogenen Liniencoordinaten. Die Gleichung eines Punktes:

$$Au + Bv + C = 0$$

wird durch Einführung der homogenen Liniencoordinaten homogen:

$$Au + Bv + Cw = 0$$

und wir können sagen:

Die Coefficienten der Variabeln in der homogenen Gleichung einer geraden Linie sind die homogenen Coordinaten der geraden Linie. Die Coefficienten der Variabeln in der homogenen Gleichung eines Punktes sind die homogenen Coordinaten des Punktes.

Digitized by Google

Componiren wir nun aus den homogenen Gleichungen irgend zweier Punkte:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0,$$

die durch ihre homogenen Coordinaten $x_0\ y_0\ z_0$ und $x_1\ y_1\ z_1$ gegeben seien, die Gleichung:

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 = 0$$

eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie der beiden Punkte, und bezeichnen seine Coordinaten mit $x\ y\ z$, so haben wir nach dem angegebenen Satze:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1. \end{aligned}$$

Es sind dieses lineare Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z eines variabeln Punktes auf einer geraden Linie, wenn man λ_0 und λ_1 variiren lässt, nicht Brüche, wie wir sie am Anfange der Vorlesung aufgestellt haben. Wir wollen noch bemerken, dass man auch $\lambda_0 = 1$ setzen und allein λ_1 variiren lassen kann; die drei Gleichungen stellen doch jeden beliebigen Punkt auf der geraden Linie dar.

Componiren wir aus den homogenen Gleichungen von irgend drei Punkten $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$:

$$U_0 = 0. \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0$$

die Gleichung:

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0.$$

eines Punktes $U = 0$ und bezeichnen die Coordinaten dieses Punktes mit x, y, z, so haben wir:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2. \end{aligned}$$

Es sind dieses drei lineare Gleichungen mit den drei Unbekannten λ, wenn man die Coordinaten des Punktes $U = 0$ und mit ihnen den Punkt als beliebig gegeben betrachtet. Da man die Werthe der Unbekannten λ immer so bestimmen kann, dass sie den drei Gleichungen genügen, — ausgenommen wenn die drei ersten Punkte auf einer geraden Linie liegen, — so kann man auch die Gleichung jedes beliebigen Punktes $U = 0$ com-

Digitized by Google

poniren aus den Gleichungen von irgend drei gegebenen Punkten, wenn diese nicht auf einer geraden Linie liegen.

Wenn dagegen:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0$$

die homogenen Gleichungen irgend zweier, durch ihre Coordinaten $u_0\ v_0\ w_0$ und $u_1\ v_1\ w_1$ gegebenen, geraden Linien sind, so ist:

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen, durch den Schnittpunkt der ersteren gezogenen geraden Linie. Bezeichnen wir mit $u\ v\ w$ die Coordinaten dieser geraden Linie, so haben wir nach dem angegebenen Satze:

$$\begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1, \end{aligned}$$

lineare Ausdrücke der Variabeln λ für die Coordinaten einer sich um einen bestimmten Punkt drehenden geraden Linie. Auch hier kann man $\lambda_0 = 1$ setzen und allein λ_1 variiren lassen; die drei Gleichungen werden jede Lage der sich um den Punkt drehenden geraden Linie ausdrücken.

Sind endlich die homogenen Gleichungen von drei durch ihre Coordinaten $u_0\ v_0\ w_0$, $u_1\ v_1\ w_1$, $u_2\ v_2\ w_2$ gegebene gerade Linien:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \quad U_2 = 0,$$

die nicht durch denselben Punkt gehen, so wird:

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie $U = 0$ sein, deren Coordinaten $u\ v\ w$ sich durch die Gleichungen ausdrücken:

$$\begin{aligned} u &= \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ v &= \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ w &= \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2. \end{aligned}$$

Denn wenn die Coordinaten $u\ v\ w$ gegeben sind, so hat man diese drei linearen Gleichungen, welche die drei Factoren λ bestimmen.

Wir drücken dieses in Verbindung mit einer früheren Bemerkung nur eleganter aus, wenn wir sagen:

Digitized by Google

Wenn $U = 0$ $U_0 = 0$ $U_1 = 0$ $U_2 = 0$ die Gleichungen von irgend welchen vier Punkten oder von irgend welchen vier geraden Linien sind, so lassen sich vier Factoren λ der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$\lambda U + \lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0.$$

Wir wollen nun irgend vier von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien, deren homogene Gleichungen seien:

$$U_0 = 0 \quad U_1 = 0 \quad U_0 - \lambda U_1 = 0 \quad U_0 - \mu U_1 = 0,$$

in Verbindung bringen mit vier in einer und derselben geraden Linie liegenden Punkten, die durch ihre homogenen Gleichungen gegeben seien:

$$V_0 = 0 \quad V_1 = 0 \quad V_0 - l V_1 = 0 \quad V_0 - m V_1 = 0.$$

Die vier Punkte liegen respective auf den vier geraden Linien unter den Bedingungen:

$$U_0^0 = 0 \quad U_1' = 0 \quad l U_0' + \lambda U_1^0 = 0 \quad m U_0' + \mu U_1^0 = 0,$$

die wir erhalten, wenn wir die aus den Gleichungen der Punkte genommenen Coordinaten der Punkte einsetzen respective in die Gleichungen der geraden Linien an Stelle der Variabeln. Es ist nämlich hierbei angenommen worden, dass U_0 und U_1 übergehen in U_0^0 und U_1^0, wenn wir für die Variabeln setzen die Coordinaten des Punktes V_0, und dass U_0 und U_1 übergehen in U_0' und U_1', wenn wir für die Variabeln setzen die Coordinaten des Punktes V_1.

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir durch Elimination:

$$\frac{l}{m} = \frac{\lambda}{\mu}$$

ein Resultat, welches mit Rücksicht auf die Bedingungen sich so aussprechen lässt:

Wenn man zwei von einem und demselben Punkte ausgehende Linienpaare durch irgend eine gerade Linie schneidet, so ist das anharmonische Verhältniss der Linienpaare gleich

Wenn man von einem und demselben Punkte aus durch irgend zwei Punktepaare auf derselben geraden Linie zwei Linienpaare legt, so ist das anharmonische Verhältniss der

Digitized by Google

dem anharmonischen Verhältnisse der Schnittpunktepaare.

Punktepaare gleich dem anharmonischen Verhältnisse der Linienpaare.

Hieraus folgt ferner:

Irgend zwei harmonische Linienpaare werden von einer beliebigen geraden Linie in harmonischen Punktepaaren geschnitten.

Zwei von einem und demselben Punkte ausgehende Linienpaare sind harmonische, wenn sie durch zwei harmonische Punktepaare gehen.

Drei Linienpaare der Involution werden von einer beliebigen geraden Linie in Punktepaaren der Involution geschnitten.

Drei von einem und demselben Punkte ausgehende Linienpaare bilden eine Involution, wenn sie durch drei Punktepaare der Involution gehen.

Die beiden letzten Sätze folgen aus den beiden vorhergehenden und aus den Definitionen von Punkte- und Linien-Paaren der Involution. Denn construirt man dasjenige Linienpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei Linienpaare der Involution, so schneidet jedes Linienpaar der Involution eine beliebige gerade Linie in einem Punktepaare, welches harmonisch ist zu dem Schnittpunktepaare des construirten Linienpaares auf der beliebigen geraden Linie. Da man also auf der beliebigen geraden Linie ein Punktepaar angeben kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Schnittpunktepaare der Linienpaare der Involution, so bilden jene drei Schnittpunktepaare eine Involution. Einen analogen Beweis kann man für den letzten Satz geben; er geht aber auch aus dem nebenstehenden hervor.

An Stelle der homogenen Coordinaten bedient man sich in vielen Fällen mit Vortheil der Dreieckcoordinaten. Ihre Bedeutung soll in dem Folgenden entwickelt werden.

Man nehme irgend ein Dreieck, in welchem der Einfachheit wegen der Coordinatenanfangspunkt liegen soll. Die Gleichungen der Seiten des Dreiecks seien in der Normalform gegeben:

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0.$$

Dieses Dreieck bildet das Fundament des neuen Coordinatensystemes zugleich mit drei anderen beliebig gegebenen Richtungs-

Digitized by Google

linien A', B', C', die mit den Seiten des Dreiecks Winkel bilden, deren negative reciproke Sinus wir bezeichnen mit:

$$-\frac{1}{\sin(AA')} = \varkappa \quad -\frac{1}{\sin(BB')} = \lambda \quad -\frac{1}{\sin(CC')} = \mu.$$

Wenn wir nun von einem beliebigen Punkte p, dessen Coordinaten seien x, y, eine gerade Linie ziehen parallel der Richtungslinie A' bis zum Schnitt mit der Dreieckseite A und die Länge dieser Linie mit a bezeichnen; wenn wir ferner eine gerade Linie von dem Punkte p ziehen parallel mit der Richtungslinie B' bis zum Schnitt mit der Dreieckseite B und die Länge derselben mit b bezeichnen; wenn wir endlich von dem Punkte p eine gerade Linie ziehen parallel mit der Richtungslinie C' bis zum Schnitt mit C, deren Länge sei c, so haben wir zuerst die Längen der vom Punkte p auf die Dreieckseiten gefällten Lothe $-A$, $-B$, $-C$ und darnach die Ausdrücke der Längen der genannten geraden Linien:

$$a = \varkappa A \quad b = \lambda B \quad c = \mu C.$$

Diese von dem beliebigen Punkte p und den Seiten des Dreiecks begrenzten geraden Linien nennt man Dreieckcoordinaten des Punktes und das Dreieck, worauf sie sich beziehen, das Coordinatendreieck.

Aber nicht allein die drei Grössen a, b, c werden Dreieckcoordinaten des Punktes p genannt, sondern auch jede drei andere Grössen a, b, c, wenn sie den vorigen proportional sind. Denn sind die proportionalen Grössen a, b, c gegeben, so kann man den Punkt p mit den angegebenen Dreieckcoordinaten ebenfalls unzweideutig construiren.

Die drei letzten Gleichungen, welche die Dreieckcoordinaten eines beliebigen Punktes p durch die rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken, werden, wenn man für die rechtwinkligen Coordinaten die homogenen Coordinaten einführt, von der Form:

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= \alpha^0 x + \beta^0 y + \gamma^0 z \\ b &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ c &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}$$

und die neun Coefficienten in ihnen hängen allein ab von der Lage des Coordinatendreiecks und den Richtungslinien, nicht von der Lage des Punktes p.

Digitized by Google

Welche Werthe auch die neun Coefficienten in diesen Substitutionen haben, dieselben werden immer den Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Dreieckcoordinaten eines ganz bestimmten Systemes vermitteln. Die Gleichung der Seiten des Coordinatendreiecks sind nämlich:

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $z = 1$ und bringt sie auf die Normalform durch Division mit den Grössen $\varkappa$, λ, μ, welche sich leicht bestimmen lassen, so hat man die Sinus, welche die Richtungslinien A', B', C' mit den Seiten a, b, c des Coordinatendreiecks bilden:

$$\sin(aA') = -\frac{1}{\varkappa}, \quad \sin(bB') = -\frac{1}{\lambda}, \quad \sin(cC') = -\frac{1}{\mu}$$

und damit die Richtungen jener Linien A', B', C' selbst.

Durch Auflösung der angegebenen linearen Substitutionen erhält man Gleichungen derselben Art:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 a + \alpha_1 b + \alpha_2 c \\ y &= \beta_0 a + \beta_1 b + \beta_2 c \\ z &= \gamma_0 a + \gamma_1 b + \gamma_2 c. \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Substitutionen drücken die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes linear aus durch seine Dreieckcoordinaten.

Die geometrische Bedeutung der neun Coefficienten in diesen Gleichungen tritt zu Tage, wenn man den beliebigen Punkt p in eine Ecke des Coordinatendreiecks rückt, zum Beispiel, wenn er in die Ecke rückt, in welcher sich die Seiten $b = 0$ und $c = 0$ schneiden. Denn setzt man in den drei Gleichungen $b = 0$ und $c = 0$, so erhält man aus ihnen die homogenen Coordinaten α_0, β_0, γ_0 der genannten Ecke des Coordinatendreiecks.

Während also in den ursprünglichen Substitutionen (1) die Horizontalcoefficienten die homogenen Coordinaten der Seiten des Coordinatendreiecks darstellen, so drücken in den letzteren Substitutionen (2), die Auflösung der ersten, die Verticalcoefficienten die homogenen Coordinaten der Ecken des Coordinatendreiecks aus.

Betrachten wir nun die Gleichung einer beliebigen geraden Linie:

$$ux + vy + wz = 0,$$

Digitized by Google

deren homogene Coordinaten u, v, w gegeben seien. Dieselbe geht durch die Substitutionen (2) über in:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

indem man hat:

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w \\ \beta &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w \\ \gamma &= \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w. \end{aligned}$$

Es beweiset dieses, dass die lineare Gleichung einer geraden Linie bei Einführung der Dreieckcoordinaten ihren Grad nicht ändert. Dasselbe gilt auch von jeder homogenen Gleichung, sei sie die Gleichung eines Linienpaares, eines Kreises, oder einer anderen algebraischen Curve.

Die Auflösung des letzten Systemes Gleichungen (3) nach den Unbekannten u, v, w giebt die Substitutionen für homogene Liniencoordinaten zur Uebertragung in das Dreiecksystem:

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= \alpha^0 \alpha + \alpha' \beta + \alpha'' \gamma \\ v &= \beta^0 \alpha + \beta' \beta + \beta'' \gamma \\ w &= \gamma^0 \alpha + \gamma' \beta + \gamma'' \gamma, \end{aligned}$$

wobei wir nicht unerwähnt lassen dürfen, dass in diesem Systeme (4) von drei Gleichungen, mit Verwechselung der Horizontal- und Verticalreihen, dieselben Coefficienten wieder auftreten, welche das System (1) enthält, von welchem wir ausgingen. Es folgt dieses aus einem bekannten algebraischen Satze von der Auflösung linearer Gleichungen. Man kann sich aber auch leicht durch directe Auflösung der Systeme (1) und (3) davon überzeugen. Die aufgelöseten Gleichungen (2) und (4) erhalten die Gestalt der aufzulösenden Gleichungen (1) und (3). Die Horizontalreihen der Coefficienten in den aufgelöseten Gleichungen sind nur mit einander vertauscht.

Die Coefficienten α, β, γ von a, b, c in der transformirten Gleichung der betrachteten geraden Linie heissen die Coordinaten der geraden Linie in dem Dreiecksystem. Die beiden letzten Systeme von Gleichungen (3) und (4) sind die Transformationsformeln, durch welche sich die zuletzt genannten durch die gegebenen Coordinaten der geraden Linie in dem rechtwinkligen Systeme oder die Coordinaten der geraden Linie in

Digitized by Google

dem rechtwinkligen Systeme sich durch die Coordinaten derselben in dem Dreiecksystem ausdrücken lassen.

Betrachten wir die Gleichung eines beliebigen Punktes in dem rechtwinkligen Coordinatensystem:

$$xu + yv + zw = 0,$$

dessen homogene Coordinaten x, y, z gegeben seien, so geht dieselbe durch die Substitutionen der Werthe (4) der Variabeln u, v, w über in die Punktgleichung des Dreiecksystemes:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

indem die Constanten a, b, c gerade die Bedeutung haben, die ihnen das System (1) anweiset.

Es sind demnach die Coefficienten der Variabeln in einer Punktgleichung des Dreiecksystemes die Coordinaten des Punktes in diesem Systeme, ebenso wie die Coefficienten der Variabeln in der Gleichung einer geraden Linie des Dreiecksystemes die Coordinaten der geraden Linie in dem Systeme sind.

Man wird sich mit Vortheil des Dreieckcoordinaten-Systemes bedienen, wenn man das Coordinatendreieck als einen Theil der Figur einführen kann, die betrachtet werden soll. Wir werden dieses an Beispielen erläutern.

Es soll die allgemeine Form der Gleichungen von drei Linienpaaren $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ gefunden werden, die sich in drei Punkten schneiden, welche in einer und derselben geraden Linie r'' liegen.

Wir nehmen die geraden Linien α, β, γ als die Seiten des Coordinatendreiecks, deren Gleichungen in homogenen rechtwinkligen Coordinaten seien:

(5) . . . . . $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0.$

Alsdann ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung irgend einer geraden Linie, also auch der geraden Linie r'' von der Form:

(6) . . . . . $r'' \equiv \frac{\alpha}{a_{12}} + \frac{\beta}{a_{20}} + \frac{\gamma}{a_{01}} = 0.$

Digitized by Google

Verändern wir in dieser Gleichung den Coefficienten $\frac{1}{a_{12}}$ in $\frac{a_{00}}{a_{01}a_{20}}$, indem wir unter a_{00} eine beliebige Grösse verstehen, so erhalten wir die Gleichungen aller geraden Linien, welche in dem Schnittpunkte der Linien α und r'' zusammenkommen. Es werden also durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{a_{00}}{a_{01}a_{20}}\alpha + \frac{\beta}{a_{20}} + \frac{\gamma}{a_{01}} &= 0 \\ \frac{\alpha}{a_{12}} + \frac{a_{11}}{a_{12}a_{01}}\beta + \frac{\gamma}{a_{01}} &= 0 \\ \frac{\alpha}{a_{12}} + \frac{\beta}{a_{20}} + \frac{a_{22}}{a_{12}a_{20}}\gamma &= 0 \end{aligned}$$

alle geraden Linien ausgedrückt, welche sich um die drei Schnittpunkte der geraden Linie r'' mit den drei anderen α, β, γ beliebig drehen, wenn a_{00}, a_{11}, a_{22} beliebige Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir nun die linken Theile dieser Gleichungen respective mit: $\frac{\varkappa\alpha'}{a_{01}a_{20}}$, $\frac{\lambda\beta'}{a_{12}a_{01}}$, $\frac{\mu\gamma'}{a_{12}a_{20}}$, oder setzen kürzer:

$$(8) \quad \begin{aligned} *) \quad \varkappa\alpha' &\equiv a_{00}\alpha + a_{01}\beta + a_{02}\gamma \\ \lambda\beta' &\equiv a_{10}\alpha + a_{11}\beta + a_{12}\gamma \\ \mu\gamma' &\equiv a_{20}\alpha + a_{21}\beta + a_{22}\gamma, \end{aligned}$$

so sind, vorausgesetzt, dass $a_{12} = a_{21}$, $a_{20} = a_{02}$, $a_{01} = a_{10}$, welche Voraussetzung wir immer machen werden, wo wir sie nicht ausdrücklich aufheben, die identischen Gleichungen (8) die Bedingungen für die gesuchten Linienpaare:

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma &= 0 \\ \alpha' = 0 \quad \beta' = 0 \quad \gamma' &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Wir machen auf die elegante Form der Bedingungsgleichungen (8) aufmerksam für drei Linienpaare (9), die sich in drei Punkten auf einer geraden Linie schneiden, oder dass die drei Verbindungslinien dreier Punktepaare (9) sich in einem und demselben Punkte schneiden. Die rechten Theile dieser identischen Gleichungen (8) stellen sich nämlich als die halben partiellen Differentialquotienten einer und derselben homogenen Function der zweiten Ordnung dar:

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \equiv a_{00}\alpha^2 + a_{11}\beta^2 + a_{22}\gamma^2 + 2a_{12}\beta\gamma + 2a_{20}\gamma\alpha + 2a_{01}\alpha\beta,$$

so dass unter der angegebenen Bezeichnung die identischen Gleichungen (8) sich kürzer so darstellen lassen:

$$\varkappa\alpha' \equiv \tfrac{1}{2}f'(\alpha) \quad \lambda\beta' \equiv \tfrac{1}{2}f'(\beta) \quad \mu\gamma' \equiv \tfrac{1}{2}f'(\gamma).$$

Digitized by Google

Wir drücken dasselbe nur weitläuftiger aus, wenn wir sagen, dass die neun Coefficienten der Variabeln in den Gleichungen (8) sich so bestimmen lassen müssen, dass den Gleichungen identisch genügt wird, wenn die Gleichungen (9) Linienpaare darstellen, welche sich in drei Punkten schneiden, die auf einer geraden Linie r'' liegen.

Um den Bedingungsgleichungen (8) eine einfachere Gestalt zu geben, führen wir für die Variabeln $\alpha, \beta \ldots \alpha' \ldots$ in ihnen die Variabeln $a, b \ldots a' \ldots$ ein, indem wir setzen:

$$a_{01}a_{02} - a_{00}a_{12} \equiv b_{12},\quad a_{10}a_{12} - a_{11}a_{20} \equiv b_{20},\quad a_{20}a_{21} - a_{22}a_{01} \equiv b_{01}$$

$$(10)\quad \frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{b_{12}}\,a \equiv \alpha \qquad \frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{b_{20}}\,b \equiv \beta \qquad \frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{b_{01}}\,c \equiv \gamma$$

$$-\frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{a_{12}}\,a' \equiv \varkappa\alpha' \qquad -\frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{a_{20}}\,b' \equiv \lambda\beta' \qquad -\frac{a_{12}a_{20}a_{01}}{a_{01}}\,c' \equiv \mu\gamma'.$$

Dadurch geht die Gleichung (6) der geraden Linie, in welcher sich die drei Linienpaare:

$$(11)\quad \ldots\ldots \qquad \begin{matrix} a = 0 & b = 0 & c = 0 \\ a' = 0 & b' = 0 & c' = 0 \end{matrix}$$

schneiden, über in:

$$(12)\quad r'' \equiv a_{12}a_{20}a_{01}\left\{\frac{a}{a_{12}b_{12}} + \frac{b}{a_{20}b_{20}} + \frac{c}{a_{01}b_{01}}\right\} = 0,$$

während die identischen Gleichungen (8) die Gestalt erhalten:

$$(13)\quad \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{matrix} a - a' \equiv r'' \\ b - b' \equiv r'' \\ c - c' \equiv r''. \end{matrix}$$

Wir ersehen hieraus, dass, wenn drei Linienpaare sich in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie $r'' = 0$ liegen, die Gleichungen der drei Linienpaare durch Multiplication mit ganz bestimmten Factoren in eine solche Form (11) gebracht werden können, dass man identisch hat (13) und umgekehrt, dass sich drei Linienpaare (11) in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie $r'' =$ liegen, wenn die identischen Gleichungen (13) stattfinden.

Digitized by Google

Es leuchtet dieses auch von selbst ein. Denn wenn:

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$
$$A' = 0 \quad B' = 0 \quad C' = 0$$

die Gleichungen der drei Linienpaare sind, welche sich in einer beliebig gegebenen geraden Linie $r'' = 0$ schneiden, so müssen sich solche sechs constante Factoren $\varkappa\lambda \ldots \varkappa' \ldots$ bestimmen lassen, dass man identisch hat:

$$\varkappa A - \varkappa' A' \equiv r'' \quad \lambda B - \lambda' B' \equiv r'' \quad \mu C - \mu' C' \equiv r''.$$

Setzt man nun:

$$\varkappa A \equiv a, \ \lambda B \equiv b, \ \mu C \equiv c, \ \varkappa' A' \equiv a', \ \lambda' B' \equiv b', \ \mu' C' \equiv c',$$

so hat man sowohl jene Gleichungen (11) als die identischen Gleichungen (13).

Es soll die allgemeine Form der Gleichungen von drei Punktepaaren $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ gefunden werden, deren drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte r'' schneiden.

Wir wählen die Punkte $\alpha\beta\gamma$ als die Ecken eines Coordinatendreiecks, deren Gleichungen in homogenen Liniencoordinaten seien (5). In dieser Voraussetzung stellt die Gleichung (6) jeden beliebigen Punkt dar, also auch den Punkt r''.

Verändern wir in dieser Gleichung (6) $\frac{1}{a_{12}}$ in $\frac{a_{00}}{a_{01}a_{02}}$, oder $\frac{1}{a_{20}}$ in $\frac{a_{11}}{a_{12}a_{10}}$, oder $\frac{1}{a_{01}}$ in $\frac{a_{22}}{a_{21}a_{20}}$, indem wir unter a_{00} a_{11} a_{22} beliebige Grössen verstehen, so erhalten wir die Gleichungen (7) von irgend drei Punkten, die respective auf den drei geraden Linien $\alpha r''$, $\beta r''$, $\gamma r''$ beliebig liegen. Diese Gleichungen (7) und die Gleichungen (5) stellen also irgend drei Punktepaare dar, deren Verbindungslinien sich in demselben Punkte r'' schneiden.

Verfolgen wir nun die in dem Vorhergehenden mit den Gleichungen (7) vorgenommenen Operationen in der veränderten Bedeutung, so kommen wir zu dem Schluss:

Wenn die Gleichungen (9) drei Punktepaare darstellen sollen, deren drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte r'' schneiden, so müssen sich in den Gleichungen (8) die neun Coefficienten

Digitized by Google

der Variabeln so bestimmen lassen, dass diesen Gleichungen identisch genügt wird.

Wir specialisiren endlich diesen Satz dahin, dass wir sagen:

Wenn die drei Verbindungslinien von drei Punktepaaren sich in einem und demselben Punkte r'' schneiden, so lassen sich die Gleichungen der drei Punktepaare durch Multiplication mit bestimmten Factoren auf die Form (11) bringen, so dass man die identischen Gleichungen (13) hat; und umgekehrt sind die identischen Gleichungen (13) das Criterium für drei Punktepaare (11), deren drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Es seien $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ die Gleichungen der Seiten eines beliebigen Coordinatendreiecks und

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

mit gegebenen Coefficienten die Gleichung einer beliebigen geraden Linie in Dreieckcoordinaten a, b, c. Es sollen die Gleichungen der Schnittpunkte der geraden Linie und der Seiten des Dreiecks in Liniencoordinaten α, β, γ des Dreiecksystemes gefunden werden.

Die Dreieckcoordinaten des Schnittpunktes der geraden Linie und der Dreieckseite $a = 0$ ergeben sich aus den beiden Gleichungen:

$$Aa + Bb + Cc = 0 \quad a = 0$$

nämlich, da nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen:

$$a = 0 \quad b = \frac{1}{B} \quad c = -\frac{1}{C}.$$

Multipliciren wir dieselben respective mit den Liniencoordinaten α, β, γ des Dreiecksystemes und setzen, nach bekannter Regel, die Summe der Produkte gleich 0, so erhalten wir die Gleichung des gesuchten Schnittpunktes: $\frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = 0$.

Es sind demnach die in der Aufgabe geforderten Gleichungen der Schnittpunkte der geraden Linie und der Seiten des Dreiecks:

$$\frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = 0 \quad \frac{\gamma}{C} - \frac{\alpha}{A} = 0 \quad \frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} = 0.$$

Digitized by Google

Es seien $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ die Gleichungen der Ecken eines beliebigen Coordinatendreiecks und

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

mit gegebenen Coefficienten A, B, C die Gleichung eines beliebigen Punktes in Dreieckcoordinaten α, β, γ. Es sollen die Gleichungen der geraden Linien in Punktcoordinaten a, b, c des Dreiecksystemes gefunden werden, welche den Punkt mit den Ecken des Dreiecks verbinden.

Die folgenden Gleichungen sind die Auflösung der Aufgabe:

$$\frac{b}{B} - \frac{c}{C} = 0 \quad \frac{c}{C} - \frac{a}{A} = 0 \quad \frac{a}{A} - \frac{b}{B} = 0.$$

Für die Anwendungen geben wir die gefundenen Resultate als Regeln wieder:

Man erhält aus der Gleichung einer geraden Linie in Dreieckcoordinaten a, b, c die Gleichungen der Schnittpunkte der geraden Linie und der Seiten des Coordinatendreiecks in Liniencoordinaten α, β, γ des Systemes, wenn man in der Gleichung nach einander für a, b, c setzt:

$$a = 0 \quad b = \frac{1}{\beta} \quad c = -\frac{1}{\gamma}$$

$$a = -\frac{1}{\alpha} \quad b = 0 \quad c = \frac{1}{\gamma}$$

$$a = \frac{1}{\alpha} \quad b = -\frac{1}{\beta} \quad c = 0.$$

Man erhält aus der Gleichung eines Punktes in Dreieckcoordinaten α, β, γ die Gleichungen der geraden Linien, welche den Punkt mit den Ecken des Coordinatendreiecks verbinden in Punktcoordinaten a, b, c des Systemes, wenn man in der Gleichung nach einander für α, β, γ setzt:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{b} \quad \gamma = -\frac{1}{c}$$

$$\alpha = -\frac{1}{a} \quad \beta = 0 \quad \gamma = \frac{1}{c}$$

$$\alpha = \frac{1}{a} \quad \beta = -\frac{1}{b} \quad \gamma = 0.$$

Digitized by Google

Zehnte Vorlesung.

Das Pascalsche und das Brianchonsche Sechseck.

Ein jedes Sechseck hat drei Paare gegenüberliegender Seiten. Die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste Seite liegen einander gegenüber. Ebenso hat jedes Sechseck drei Paare gegenüberliegender Ecken.

Wenn in einem Sechsecke die gegenüberliegenden Seiten oder ihre Verlängerungen sich paarweise in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie liegen, so heisst das Sechseck ein Pascalsches Sechseck.

Wenn in einem Sechseck die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks paarweise verbinden, oder ihre Verlängerungen sich in einem Punkte schneiden, so heisst das Sechseck ein Brianchonsches Sechseck.

Eigenschaften der genannten Figuren analytisch zu entwickeln, wird der Zweck dieser Vorlesung sein.

Wenn wir annehmen, dass die Gleichungen der gegenüberliegenden Seiten eines Pascalschen Sechsecks seien:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$$
$$\alpha' = 0 \quad \beta' = 0 \quad \gamma' = 0,$$

so müssen sich nach den Auseinandersetzungen am Ende der vorhergehenden Vorlesung neun Coefficienten der Art bestimmen lassen, dass man identisch hat:

$$\varkappa\alpha' \equiv a_{00}\alpha + a_{01}\beta + a_{02}\gamma$$
$$\lambda\beta' \equiv a_{10}\alpha + a_{11}\beta + a_{12}\gamma$$
$$\mu\gamma' \equiv a_{20}\alpha + a_{21}\beta + a_{22}\gamma.$$

Aus diesen Bedingungen für das Pascalsche Sechseck leiten wir nun durch Elimination von einer der Variabeln α, β, γ aus zwei Gleichungen mit Rücksicht auf die Bezeichnung (10) der vorhergehenden Vorlesung die identischen Gleichungen ab:

$$a_{20}\lambda\beta' - a_{10}\mu\gamma' \equiv b_{20}\beta - b_{12}\gamma$$
$$a_{01}\mu\gamma' - a_{21}\varkappa\alpha' \equiv b_{01}\gamma - b_{21}\alpha$$
$$a_{12}\varkappa\alpha' - a_{02}\lambda\beta' \equiv b_{12}\alpha - b_{02}\beta.$$

Digitized by Google

Diese identischen Gleichungen lassen die doppelte Zusammensetzung der Gleichungen

$$a_{20}\lambda\beta' - a_{10}\mu\gamma' = 0 \quad a_{01}\mu\gamma' - a_{21}\varkappa\alpha' = 0 \quad a_{12}\varkappa\alpha' - a_{02}\lambda\beta' = 0$$

von drei geraden Linien erkennen, welche deshalb in der beschriebenen Figur leicht construirt werden können. Die erste gerade Linie verbindet nämlich den Schnittpunkt der geraden Linien $\beta'\gamma'$ mit dem Schnittpunkte der geraden Linien $\beta\gamma$ und so weiter.

Diese drei Verbindungslinien schneiden sich in einem und demselben Punkte, weil die Summe ihrer Gleichungen identisch 0 giebt. Sie verbinden die entsprechenden Ecken zweier Dreiecke, von welchen das eine aus den geraden, das andere aus den gegenüberliegenden ungeraden Seiten des Pascalschen Sechsecks besteht.

Stellen dagegen die oben angegebenen drei Gleichungenpaare drei Punktepaare dar, die wir als die gegenüberliegenden Ecken eines Sechsecks betrachten wollen, so sind die darauf folgenden identischen Gleichungen die Bedingungen für ein Brianchonsches Sechseck. Die drei geraden und die drei gegenüberliegenden ungeraden Ecken des Sechsecks bilden die Ecken zweier Dreiecke, deren entsprechende Seiten sich in drei Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte werden analytisch durch die zuletzt angegebenen drei Gleichungen dargestellt, wie aus den umgeformten identischen Gleichungen ersichtlich ist. Sie liegen auf einer geraden Linie, weil die Summe ihrer Gleichungen identisch 0 giebt.

Die Resultate der geführten Untersuchung fassen wir kurz zusammen in den beiden Sätzen:

Wenn man in einem Pascalschen Sechsecke die geraden Seiten als die Seiten eines Dreiecks und die gegenüberliegenden ungeraden Seiten als die entsprechenden Seiten eines zweiten Dreiecks betrachtet, so schneiden sich die

Wenn man in einem Brianchonschen Sechsecke die geraden Ecken als die Ecken eines Dreiecks und die gegenüberliegenden ungeraden Ecken als die entsprechenden Ecken eines zweiten Dreiecks betrachtet, so schneiden sich

Digitized by Google

drei geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken der beiden Dreiecke paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte.

die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke paarweise in drei Punkten, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen.

Diese geometrischen Sätze gingen aus der doppelten Interpretation derselben analytischen Gleichungen hervor. Wie in dem vorliegenden Falle, so werden alle analytischen Formeln in dieser Vorlesung einer gleichen doppelten geometrischen Interpretation fähig sein und jedem aus ihnen gezogenen geometrischen Satze wird ein anderer entsprechen. Wir werden die entsprechenden Sätze neben einander stellen, jedoch nur den einen Satz wirklich beweisen. Der Beweis des nebenstehenden Satzes ergiebt sich dann nach dem Vorhergehenden von selbst.

Wir verzichten auch darauf, Figuren zu zeichnen, welche die Sätze veranschaulichen sollen. Die vielen Linien in ihnen würden ein weniger verständliches Bild der Sätze geben, als welches man aus ihren Gleichungen abnehmen kann. Das letztere ist scharf, das andere nur unvollkommen.

Zum Beweise der angegebenen beiden Sätze bedarf es nicht des grossen Apparates, den wir aufgewendet haben. Einfacher kommen wir zum Ziele, wenn wir uns aus der vorhergehenden Vorlesung daran erinnern, dass die Gleichungen der gegenüberliegenden Seiten eines in der gegenwärtigen Vorlesung definirten Pascalschen Sechsecks sich durch solche Gleichungen ausdrücken:

$$(1) \quad \begin{matrix} a = 0 & b = 0 & c = 0 \\ a' = 0 & b' = 0 & c' = 0, \end{matrix}$$

dass man identisch hat:

$$(2) \quad \begin{matrix} a - a' \equiv r'' \\ b - b' \equiv r'' \\ c - c' \equiv r'', \end{matrix}$$

und dass $r'' = 0$ die Gleichung der geraden Linie ist, in welcher die gegenüberliegenden Seiten des Pascalschen Sechsecks sich paarweise schneiden. Zugleich wollen wir zur Anwendung

Digitized by Google

im Folgenden bemerken, wenn wir identische Gleichungen von der Form (2) auftreten sehen, dass wir vergewissert sein können, dass die Gleichungen (1) die gegenüberliegenden Seiten eines Pascalschen Sechsecks analytisch ausdrücken.

Wenn wir nun drei Symbole ϱ definiren als lineare Ausdrücke der variabeln Coordinaten eines beliebigen Punktes durch die identischen Gleichungen:

$$(3) \ldots \quad b - c \equiv \varrho \quad c - a \equiv \varrho' \quad a - b \equiv \varrho'',$$

so haben wir auf Grund der identischen Gleichungen (2)

$$b' - c' \equiv \varrho \quad c' - a' \equiv \varrho' \quad a' - b' \equiv \varrho'',$$

woraus folgt, dass die Gleichungen:

$$\varrho = 0 \quad \varrho' = 0 \quad \varrho'' = 0$$

die geraden Linien darstellen, welche die in dem ersten Satze genannten entsprechenden Ecken der beiden Dreiecke verbinden. Da aber nach (3) identisch ist:

$$(4) \ldots \ldots \ldots \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv 0,$$

so schneiden sich die drei geraden Linien ϱ in einem und demselben Punkte.

Von den bewiesenen Sätzen ist jeder die Umkehrung des anderen. Es tritt diese Behauptung besser zu Tage, wenn wir sie ausdrücken wie folgt:

Wenn die Seiten zweier Dreiecke sich paarweise in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke in einem und demselben Punkte.

Wenn zwei Dreiecke drei geraden Linien einbeschrieben sind, welche von demselben Punkte ausgehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der Dreiecke in drei Punkten, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen.

Um noch einen anderen Beweis des letzten Satzes zu führen, nehmen wir an, dass $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ die Gleichungen der drei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien seien. Da sich die Linien in einem Punkte schneiden, so muss die

Digitized by Google

Summe der drei Gleichungen identisch 0 ergeben, nachdem jede vorher mit einem zu bestimmenden Factor multiplicirt worden. Nehmen wir aber an, dass von jenen Gleichungen jede schon den zu bestimmenden Factor habe, so ist die identische Gleichung (4) die Bedingung der Figur. Nehmen wir ferner an, dass $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen des einen der Figur einbeschriebenen Dreiecks seien, so müssen sich sechs Factoren $\alpha\ \beta\ ..\ \alpha'\ ..$ finden lassen, dass man identisch hat:

$$\beta B - \gamma' C \equiv \varrho \quad \gamma C - \alpha' A \equiv \varrho' \quad \alpha A - \beta' B \equiv \varrho''.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man auf Grund von (4) die identische Gleichung:

$$(\alpha - \alpha')\ A + (\beta - \beta')\ B + (\gamma - \gamma')\ C \equiv 0,$$

eine Gleichung, welche ausdrücken würde, dass die drei Seiten des Dreiecks sich in einem und demselben Punkte schneiden. Da dieses aber gegen die Voraussetzung ist, so muss die Gleichung eine identische sein, das heisst: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

Setzen wir nun $\alpha A = a$, $\beta B = b$, $\gamma C = c$, so haben wir die Gleichungen $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ der Seiten des einbeschriebenen Dreiecks und neben (4) noch die Bedingungen der Figur:

$$b - c \equiv \varrho \quad c - a \equiv \varrho' \quad a - b \equiv \varrho''.$$

Die Gleichungen $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ der Seiten des zweiten einbeschriebenen Dreiecks können wir nun gleich solche Factoren enthalten lassen, dass man hat:

$$b' - c' \equiv \varrho \quad c' - a' \equiv \varrho' \quad a' - b' \equiv \varrho''.$$

Definiren wir endlich das Symbol r'' durch die identische Gleichung $a - a' \equiv r''$, so folgen aus den letzten sechs identischen Gleichungen die identischen Gleichungen (2), welche eben ausdrücken, dass die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke sich paarweise in drei Punkten schneiden, welche auf derselben geraden Linie $r'' = 0$ liegen.

Wir kehren zurück zu dem Pascalschen Sechsecke, dessen Seiten durch die Gleichungen (1) ausgedrückt wurden unter den Bedingungen (2). Um die drei Diagonalen des Sechsecks analytisch auszudrücken, welche die gegenüberliegenden Ecken paarweise verbinden, definiren wir die drei Symbole a'', b'', c'' durch die identischen Gleichungen:

Digitized by Google

$$(5) \ldots a'' + b + c' \equiv 0 \quad a + b' + c'' \equiv 0 \quad a' + b'' + c \equiv 0,$$

aus welchen mit Zuziehung von (2) die identischen Gleichungen folgen:

$$(6) \ldots a'' + b' + c \equiv 0 \quad a + b'' + c' \equiv 0 \quad a' + b + c'' \equiv 0.$$

Die hierdurch dargelegte doppelte Zusammensetzung der neu eingeführten Symbole aus den alten beweiset, dass:

$$(7) \ldots\ldots a'' = 0 \quad b'' = 0 \quad c'' = 0$$

die Gleichungen der drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks sind.

Definiren wir endlich zwei Symbole r und r' durch die identischen Gleichungen:

$$a' - a'' \equiv r \quad a'' - a \equiv r',$$

so haben wir unter Berücksichtigung von (5) und (6):

$$(8) \ldots\ldots \begin{array}{llll} a' - a'' \equiv r & a'' - a \equiv r' \\ b' - b'' \equiv r & b'' - b \equiv r' \\ c' - c'' \equiv r & c'' - c \equiv r', \end{array}$$

und aus (8) und (2) folgt:

$$(9) \ldots\ldots r + r' + r'' \equiv 0.$$

Die identischen Gleichungen (8) lassen erkennen, dass in der durch die drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks erweiterten Figur mit Ausnahme des Pascalschen Sechsecks, von dem wir ausgingen, noch zwei Pascalsche Sechsecke vorliegen und die identische Gleichung (9) beweiset, dass gewisse drei durch die drei Pascalschen Sechsecke bestimmte gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Um diese, aus den aufgestellten Gleichungen abzunehmenden, Sätze bequemer auszudrücken, lassen wir die Definitionen vorausgehen: Wir nennen eine **Pascalsche Linie** diejenige gerade Linie, in welcher sich die gegenüberliegenden Seiten des Pascalschen Sechsecks schneiden; der **Brianchonsche Punkt** eines Brianchonschen Sechsecks soll der Punkt sein, in welchem sich die drei Diagonalen des Sechsecks schneiden. Hiernach haben wir nun die Sätze:

Digitized by Google

Wenn man in einem gegebenen Pascalschen Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten und die Diagonalen ein zweites Pascalsches Sechseck mit denselben Ecken als das gegebene, ebenso die ungeraden Seiten und die Diagonalen ein drittes Sechseck mit denselben Ecken. Die, diesen drei Sechsecken zugehörigen Pascalschen Linien schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Wenn man in einem gegebenen Brianchonschen Sechsecke die drei Punkte fixirt, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks schneiden, so bilden die geraden Ecken und die drei fixirten Punkte die Ecken eines zweiten Brianchonschen Sechsecks mit denselben Seiten als das gegebene, ebenso die ungeraden Ecken und die fixirten Punkte die Ecken eines dritten Brianchonschen Sechsecks mit denselben Seiten. Die diesen drei Brianchonschen Sechsecken zugehörigen Brianchonschen Punkte liegen auf einer und derselben geraden Linie.

Wenn man die auf einander folgenden Ecken des gegebenen Pascalschen Sechsecks mit den Zahlen bezeichnet 1 2 3 4 5 6, so hat man die drei Sechsecke, von welchen der Satz handelt:

1 2 3 4 5 6 1 6 3 2 5 4 1 4 3 6 5 2.

Man bemerkt, dass die ungeraden Ecken in jedem dieser Sechsecke dieselben sind 1 3 5. Die ihnen gegenüberliegenden geraden Ecken sind auch dieselben 4 6 2, nur in veränderter Ordnung. Um diese Anordnung besser hervortreten zu lassen, bezeichnen wir jene drei Sechsecke symbolisch durch Brüche, deren Zähler die ungeraden Ecken, deren Nenner die ihnen gegenüberliegenden geraden Ecken enthalten:

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{135}{462} \quad \frac{135}{246} \quad \frac{135}{624}.$$

Diese Symbole für die drei Sechsecke entstehen aus einander durch cyclische Vertauschung der drei Zahlen des Nenners und

Digitized by Google

kehren wieder in sich zurück. Dieselben drei Sechsecke würden aber auch durch die Symbole ausgedrückt werden, welche aus einem der Symbole durch cyclische Vertauschung der Zahlen des Zählers hervorgehen oder wenn man für die angegebenen Brüche die reciproken Brüche nehme.

Wenn man in einem der angegebenen Brüche alle sechs Combinationen der drei Zahlen des Nenners macht, so entstehen ausser den angegebenen noch die Symbole für drei Sechsecke, welche durch cyclische Vertauschung der Zahlen des Nenners wieder in einander übergehen:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{135}{642} \quad \frac{135}{426} \quad \frac{135}{264}.$$

Von diesen drei Sechsecken wird der nachfolgende Satz handeln. Hier bemerken wir nun, dass wir nur von einem der drei Sechsecke nachzuweisen brauchen, dass es ein Pascalsches Sechseck ist, um zu wissen, dass alle drei Pascalsche Sechsecke sind und dass ihre Pascalschen Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Um auf die zuletzt genannten drei Sechsecke zu kommen, definiren wir die drei Symbole ϱ durch die identischen Gleichungen (3). Aus ihnen und den identischen Gleichungen (5) und (6) folgen dann die identischen Gleichungen:

$$(12) \ldots \quad \begin{array}{lll} b - c \equiv \varrho & c - a \equiv \varrho' & a - b \equiv \varrho'' \\ b' - c' \equiv \varrho & c' - a' \equiv \varrho' & a' - b' \equiv \varrho'' \\ b'' - c'' \equiv \varrho & c'' - a'' \equiv \varrho' & a'' - b'' \equiv \varrho'', \end{array}$$

und daraus:

$$(13) \ldots\ldots\ldots \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' \equiv 0.$$

Man sieht, dass hier wieder Pascalsche Sechsecke vorliegen, deren Seiten sind sechs von den neun geraden Linien — den sechs Seiten des gegebenen Pascalschen Sechsecks und dessen drei Diagonalen. — Es sind dieses die Sechsecke (11). Die identische Gleichung (13) beweiset, dass die drei, diesen Sechsecken zugehörigen, Pascalschen Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden. Im Anschluss an die vorhergehenden Sätze können wir deshalb sagen:

Digitized by Google

Wenn man in einem gegebenen Pascalschen Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, so lassen sich aus den neun geraden Linien der Figur sechs Sechsecke bilden, deren Ecken mit den Ecken des gegebenen Sechsecks zusammenfallen. Diese sechs Sechsecke sind Pascalsche Sechsecke, und von den ihnen zugehörigen Pascalschen Linien schneiden sich drei Linien r in einem Punkte, die drei anderen ϱ wieder in einem Punkte.

Wenn man in einem Brianchonschen Sechsecke die drei Punkte fixirt, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten schneiden, so bilden die sechs Ecken und die drei fixirten Punkte combinirt zu sechs die Ecken von sechs Sechsecken, deren Seiten mit den Seiten des gegebenen Sechsecks zusammenfallen. Diese sechs Sechsecke sind Brianchonsche Sechsecke und von den ihnen zugehörigen Brianchonschen Punkten liegen drei Punkte r auf einer geraden Linie, die drei anderen ϱ auf einer zweiten geraden Linie.

Die Punkte, in welchen sich die drei Pascalschen Linien r, oder die drei Pascalschen Linien ϱ schneiden, heissen Steinersche Punkte nach dem Entdecker. Wir werden später auf die Lage dieser Punkte näher eingehen.

Wir bereiten nur eine Ausdehnung der angegebenen Sätze vor, wenn wir dieselben wie folgt aussprechen, ausgehend von dem Pascalschen oder Brianchonschen Sechsecke und mit der geometrischen Interpretation der identischen Gleichungen (12) und (13) den Anfang machen.

Wenn man in einem Pascalschen Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten des Sechsecks, die unge-

Wenn man in einem Brianchonschen Sechsecke die drei Punkte fixirt, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks schneiden, so bilden die geraden Ecken

Digitized by Google

raden Seiten und die drei Diagonalen drei Dreiecke, welche drei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind. Die entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden sich paarweise in einer geraden Linie r, und die drei geraden Linien r schneiden sich wieder in einem und demselben Punkte.

des Sechsecks, die ungeraden und die drei fixirten Punkte die Ecken von drei Dreiecken. Die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke schneiden sich in einem Punkte ϱ, und die drei Punkte ϱ liegen auf einer geraden Linie. Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken je zweier Dreiecke schneiden sich in einem Punkte r und die drei Punkte r liegen wieder auf einer und derselben geraden Linie.

In jedem der genannten beiden Steinerschen Punkte schneiden sich drei Pascalsche Linien, in dem ersten die drei Linien r, in dem anderen die drei Linien ϱ. Wir construiren nun zu jeder Pascalschen Linie r, indem wir die beiden anderen als ein Paar betrachten, die ihr zugehörige vierte harmonische Linie. Auf gleiche Weise construiren wir die drei vierten harmonischen Linien zu den drei Pascalschen Linien ϱ.

Um ihre Gleichungen aufzustellen, definiren wir die drei Symbole R und die drei Symbole P durch die identischen Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{array}{llll} r'' - r' \equiv R & \varrho'' - \varrho' \equiv P \\ r - r'' \equiv R' & \varrho - \varrho'' \equiv P' \\ r' - r \equiv R'' & \varrho' - \varrho \equiv P''. \end{array}$$

Alsdann erhält man die Gleichungen der construirten vierten harmonischen Linien, wenn man die eingeführten Symbole einzeln gleich 0 setzt: $R = 0$ $R' = 0 \ldots P'' = 0$. Denn es ist $r'' - r' = 0$ die vierte harmonische Linie zur Linie r, deren Gleichung auf Grund von (9) sich so darstellt $r'' + r' = 0$. Und so weiter.

Aus diesen identischen Gleichungen (14) und den früheren (2), (8) und (12) gehen auf die einfachste Weise folgende hervor:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{lccc}
 & R + P \equiv 3a & R' + P \equiv 3a' & R'' + P \equiv 3a'' \\
(15) \ldots & R + P' \equiv 3b & R' + P' \equiv 3b' & R'' + P' \equiv 3b'' \\
 & R + P'' \equiv 3c & R' + P'' \equiv 3c' & R'' + P'' \equiv 3c''.
\end{array}
$$

Diese Zusammensetzung der Symbole für die Seiten und Diagonalen des gegebenen Pascalschen Sechseckes aus den in (14) eingeführten Symbolen beweiset den Satz:

Die drei vierten harmonischen Linien zu den drei Pascalschen Linien r schneiden die drei vierten harmonischen Linien zu den drei Pascalschen Linien ϱ in neun Punkten, welche auf den Seiten und den Diagonalen des gegebenen Pascalschen Sechsecks liegen.

Es beweisen ferner jene Gleichungen (15), dass ausser den genannten sechs Pascalschen Sechsecken (10) und (11) in der weiter ausgeführten Figur noch andere Pascalsche Sechsecke vorliegen, auf welche wir jedoch nicht weiter eingehen werden.

Die beschriebene Figur hat bereits eine solche Ausdehnung gewonnen, dass sie sich in einer Zeichnung schwer verfolgen lässt. Wir kehren deshalb zu dem Pascalschen Sechsecke zurück, von welchem wir ausgingen und dessen analytischen Ausdruck wir in (1) und (2) gegeben haben. Wir beabsichtigen an dieser Figur noch eine Bemerkung zu machen, deren Bedeutung an dieser Stelle sich allerdings nicht recht würdigen lässt; wir machen sie aber, um uns künftig darauf berufen zu können.

Wir definiren zu diesem Zwecke einen Kegelschnitt als den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Coordinaten einer gegebenen Gleichung des zweiten Grades, der Gleichung des Kegelschnittes, genügen, wie wir die geraden Linien als den geometrischen Ort eines Punktes definirt haben, dessen Coordinaten einer gegebenen Gleichung des ersten Grades genügen. Ob ein gegebener Punkt in einem durch seine Gleichung gegebenen Kegelschnitt liege, erfahren wir demnach, wenn wir zusehen, ob die Coordinaten des Punktes der Gleichung des Kegelschnittes genügen. Unter gewissen Voraussetzungen wird der Kegelschnitt ein Linienpaar, unter anderen Voraussetzungen ein Kreis, denn beide werden, wie wir gesehen haben, durch Gleichungen des zweiten Grades analytisch ausgedrückt.

Digitized by Google

Mit dieser Definition gehen wir an die Untersuchung des Ausdruckes zweiten Grades:

$$(16) \ldots \quad k \equiv r''r'' - r''(a + b + c) + bc + ca + ab,$$

der sich mit Rücksicht auf (2) auch so darstellen lässt:

$$k \equiv (r'' - b)(r'' - c) - a(r'' - b - c) \equiv b'c' - a(r'' - b - c).$$

Hiernach verschwindet der Ausdruck k, wenn $a = 0$ und $b' = 0$, oder wenn $a = 0$ und $c' = 0$. Er verschwindet also, wenn man in ihm für die variabeln Coordinaten die Coordinaten der einen oder der anderen Ecke des Pascalschen Sechseckes setzt, in welchen die Seite a mit den Seiten b' und c' zusammenstösst.

Ebenso können wir nachweisen, dass der Ausdruck k verschwindet, wenn wir für die variabeln Coordinaten in ihm die Coordinaten irgend einer Ecke des Pascalschen Sechsecks setzen.

Da aber $k = 0$ nach der Definition die Gleichung eines Kegelschnittes ist, so sehen wir, dass auf diesem Kegelschnitt die sechs Ecken des Pascalschen Sechsecks liegen. Wir können daher den Satz aussprechen:

Durch die sechs Ecken eines jeden Pascalschen Sechsecks lässt sich ein Kegelschnitt legen.

Es braucht hiernach der angegebene Kegelschnitt nicht der einzige zu sein, welcher durch die sechs Ecken des Pascalschen Sechsecks geht. Allein es bedarf nur des Beweises, der sehr leicht zu führen ist, dass fünf Punkte eines Kegelschnittes den Kegelschnitt unzweideutig bestimmen, um einzusehen, dass es nur einen einzigen Kegelschnitt giebt, welcher durch die sechs Ecken eines Pascalschen Sechsecks geht.

Die wahre Bedeutung des Satzes tritt erst zu Tage, wenn man es sich klar macht, wie derselbe das Mittel an die Hand giebt, durch fünf gegebene Punkte eines Kegelschnittes alle übrigen Punkte desselben linear zu construiren.

Wir haben hiermit die uns gesteckten Grenzen überschritten, denn die Kegelschnitte gehören nur hierher, insofern sie sind Linienpaare oder Kreise. Wir kommen deshalb noch ein Mal auf das Pascalsche Sechseck mit seinen drei Diagonalen zurück, um die oben angedeutete Ausdehnung zu machen. Dieselben

Digitized by Google

Formeln mit Auslassung der identischen Gleichungen (5) und (6) werden die versprochenen Sätze geben.

Die geraden Seiten eines Pascalschen Sechsecks, seine ungeraden Seiten und seine drei Diagonalen betrachteten wir als die Seiten von drei Dreiecken und fanden, dass diese Dreiecke drei geraden Linien ϱ einbeschrieben sind, welche von demselben Punkte ausgehen. Wir werden jetzt irgend drei Dreiecke betrachten, welche irgend dreien von einem Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind.

Die Gleichungen der drei geraden Linien ϱ seien $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$. Da diese Linien der Annahme nach sich in einem Punkte schneiden, so können wir ihre Gleichungen gleich in der Form annehmen, dass sie die Gleichung (13) identisch erfüllen.

Es seien ferner (1) und (7) die Gleichungen der Seiten der drei, den Linien ϱ einbeschriebenen, Dreiecke. Wir können sie nach den vorausgegangenen Auseinandersetzungen gleich mit solchen Factoren multiplicirt annehmen, dass sie den identischen Gleichungen (12) genügen.

Führen wir nun die drei Symbole r ein durch die identischen Gleichungen:

$$a' - a'' \equiv r \quad a'' - a \equiv r' \quad a - a' \equiv r'',$$

so erhalten wir ohne Weiteres aus den identischen Gleichungen (12) die identischen Gleichungen (2) und (8) nebst der identischen Gleichung (9). Diese Gleichungen sagen aber aus, dass die drei Linien a ein Dreieck bilden, die drei Linien b ein zweites und die drei Linien c ein drittes Dreieck, welche sämmtlich drei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien r einbeschrieben sind. Wir drücken dieses kurz so aus:

Wenn drei Dreiecke dreien geraden Linien einbeschrieben sind, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, so bilden die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke wieder drei Dreiecke, welche dreien geraden Linien

Wenn die entsprechenden Seiten von drei Dreiecken durch drei Punkte gehen, welche auf einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken je zweier Dreiecke in einem Punkte

Digitized by Google

einbeschrieben sind, die von einem anderen Punkte ausgehen.

und die drei Schnittpunkte liegen auf einer geraden Linie.

Wir wollen auf die Figur des ersten Satzes näher eingehen, weil wir dieselbe bei der Untersuchung sämmtlicher Sechsecke, welche die sechs Ecken eines gegebenen Pascalschen Sechsecks haben, wieder auftreten sehen werden.

Die Figur besteht aus 15 geraden Linien R, aus den 9 Seiten der drei Dreiecke, welche zugleich die Seiten der drei anderen Dreiecke bilden, aus den 3 von einem Punkte ausgehenden geraden Linien, welchen die drei ersten Dreiecke einbeschrieben sind und aus den drei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien, welchen die drei anderen Dreiecke einbeschrieben sind. Sie besteht aus 20 Punkten S, wenn wir die Ecken der sechs Dreiecke und zugleich die beiden Punkte in das Auge fassen, von welchen das erste und das zweite System von drei geraden Linien ausgehen, welchen die Dreiecke einbeschrieben sind.

Die beiden letzten Punkte S entsprechen einander so, dass, wenn man von dem ersten Punkte in der Figur ausgeht, man zu dem zweiten Punkte gerade so durch die 20 Linien R gelangt, als man zu dem ersten gelangen würde, wenn man von dem zweiten ausginge.

Bemerken wir ferner, dass in jedem Punkte S sich drei gerade Linien R schneiden und dass auf jeder Linie R vier Punkte S liegen, so sehen wir, dass jeder Punkt S seinen entsprechenden in der Figur hat. Denn man kann von jedem der 20 Punkte S in der Figur ausgehen. Von ihm gehen immer drei Linien R aus, welchen drei Dreiecke einbeschrieben sind und der angegebene Satz führt auf den ihm entsprechenden Punkt.

Wir haben in dem Vorhergehenden nur fünf Sechsecke in Betracht gezogen, welche mit einem gegebenen Pascalschen Sechseck dieselben Ecken haben. Wir fanden, dass sie Pascalsche Sechsecke sind. Aber es giebt noch mehr Sechsecke, welche mit einem gegebenen dieselben Ecken haben. Bezeichnen wir mit $1, 2 \ldots 6$ die Ecken eines gegebenen Sechsecks, so erhalten wir die Zahl aller Sechsecke mit den Ecken des gegebenen Sechsecks, wenn wir die Permutationen der genannten Zahlen bilden, das ist das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6$.

Digitized by Google

In diesem Produkt ist jedes Sechseck sechs mal gerechnet, weil die sechs cyclischen Vertauschungen der Ecken eines und desselben Sechsecks immer dasselbe Sechseck geben. Es ist überdies jedes Sechseck noch zwei mal gerechnet, weil die Umkehrung der Ordnung der auf einander folgenden Ecken auf dasselbe Sechseck zurückführt. Wir haben also jenes Produkt zu dividiren durch 6 . 2, um die Zahl der verschiedenen Sechsecke zu erhalten, welche dieselben sechs Ecken haben.

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke, welche sechs gegebene Punkte als Ecken haben.

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke, welche sechs gegebene gerade Linien als Seiten haben.

Wenn eines von den 60 Sechsecken, welche sechs gegebene Punkte als Ecken haben, ein Pascalsches Sechseck ist, fanden wir, dass noch fünf andere von den 60 Sechsecken Pascalsche Sechsecke sind. Es drängt sich nun die Frage auf, ob nicht alle 60 Sechsecke Pascalsche Sechsecke sind, wenn eines unter ihnen ein Pascalsches Sechseck ist. Diese Frage werden wir im Folgenden beantworten.

Als im Vorhergehenden ein Pascalsches Sechseck vorlag, gegeben durch die Gleichungen der Seiten, konnten wir leicht die Diagonalen analytisch ausdrücken, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden. Die sechs Seiten des gegebenen Pascalschen Sechsecks und die Diagonalen bildeten die Seiten der betrachteten sechs Sechsecke. Die genannten 60 Sechsecke haben aber noch andere Seiten. Sie haben alle geraden Linien als Seiten, die irgend zwei Ecken des gegebenen Pascalschen Sechsecks verbinden.

Wir beginnen daher unsere Untersuchung mit der Aufgabe:

Die 15 geraden Linien analytisch auszudrücken, welche jede zwei Ecken eines gegebenen Pascalschen Sechsecks verbinden.

Es seien, wie zu Anfang der Vorlesung,

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0, \quad \alpha' = 0 \quad \beta' = 0 \quad \gamma' = 0$$

die gegebenen Gleichungen der Seiten des Pascalschen Sechsecks. Die Bedingungsgleichungen dieser Figur:

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \varkappa\alpha' &\equiv a_{00}\alpha + a_{01}\beta + a_{02}\gamma \\ \lambda\beta' &\equiv a_{10}\alpha + a_{11}\beta + a_{12}\gamma \\ \mu\gamma' &\equiv a_{20}\alpha + a_{21}\beta + a_{22}\gamma \end{aligned}$$

enthalten neun Constanten, die sich auf drei nothwendige zurückführen lassen.

Setzen wir zu diesem Zwecke:

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{a_{00}}}\,a \qquad \beta \equiv \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,b \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,c$$

$$\varkappa\alpha' \equiv \sqrt{a_{00}}\,a' \qquad \lambda\beta' \equiv \sqrt{a_{11}}\,b' \qquad \mu\gamma' \equiv \sqrt{a_{22}}\,c'$$

$$\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} = u \qquad \frac{a_{20}}{\sqrt{a_{22}a_{00}}} = v \qquad \frac{a_{01}}{\sqrt{a_{00}a_{11}}} = w,$$

so haben wir die Gleichungen der Seiten des gegebenen Pascalschen Sechsecks:

$$(17) \quad \begin{aligned} a &= 0 \quad b = 0 \quad c = 0 \\ a' &= 0 \quad b' = 0 \quad c' = 0 \end{aligned}$$

und die Bedingungen des Pascalschen Sechsecks:

$$(18) \quad \begin{aligned} a' &\equiv a + wb + vc \\ b' &\equiv wa + b + uc \\ c' &\equiv va + ub + c. \end{aligned}$$

Das will sagen, dass man die Gleichungen der Seiten eines Pascalschen Sechsecks durch Multiplication mit gewissen Factoren immer auf die Form (17) bringen kann, dass man identisch hat (18), in welchen Gleichungen u, v, w zu bestimmende Constanten bedeuten.

Wir behaupten nun, dass die Gleichungen der Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Pascalschen Sechsecks verbinden:

$$(19) \quad a'' = 0 \quad b'' = 0 \quad c'' = 0,$$

durch die identischen Gleichungen bestimmt sein werden:

$$(20) \quad \begin{aligned} a'' &\equiv a + w'b + v'c \\ b'' &\equiv w'a + b + u'c \\ c'' &\equiv v'a + u'b + c, \end{aligned}$$

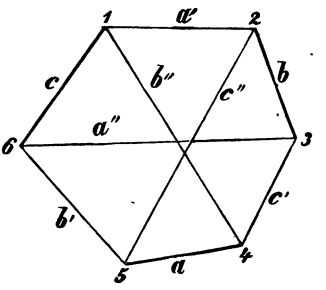
wenn wir unter u' v' w' die reciproken Grössen von u, v, w verstehen, das heisst, wenn $uu' = 1$, $vv' = 1$, $ww' = 1$.

Digitized by Google

Diese Behauptung wird gerechtfertigt sein, wenn man nachweiset, dass das Symbol a'', ähnlich wie in (5) und (6), sich sowohl aus den Symbolen b und c' als aus b' und c linear zusammensetzen lässt. Dieses sieht man aber sogleich, wenn man die dritte Gleichung (18) mit v' multiplicirt und von der ersten Gleichung (20) abzieht, oder wenn man die zweite Gleichung (18) mit w' multiplicirt und von der ersten Gleichung (20) abzieht. Und so ferner.

Die folgende Figur soll das Pascalsche Sechseck darstellen mit seinen geraden Seiten a, b, c, seinen ungeraden Seiten a' b' c', und seinen Diagonalen a'' b'' c'', gegeben durch ihre Gleichungen (17) und (19). Die Ecken dieses Sechsecks bezeichnen wir zu weiterem Gebrauch mit den Zahlen 1 2 . . 6.

Fig. 10.



Die genannten neun geraden Linien bilden, wie wir nachgewiesen haben, die Seiten von sechs Pascalschen Sechsecken, welche dieselben Ecken haben als das gegebene Pascalsche Sechseck. Von diesen haben die drei Pascalschen Sechsecke (10) der Reihe nach die Pascalschen Linien r'' r' r, die drei anderen (11) der Reihe nach die drei Pascalschen Linien ϱ'' ϱ' ϱ.

Es hat keine Schwierigkeit, auch unter der geänderten Form der Daten die Gleichungen der genannten sechs Pascalschen Linien anzugeben. Den drei Pascalschen Sechsecken (10) entsprechen der Reihe nach ihre Pascalschen Linien r'' r' r:

$$(21)\ \ldots \quad \begin{array}{l} u'a + v'b + w'c = 0 \qquad ua + vb + wc = 0 \\ (ua + vb + wc) + uvw\,(u'a + v'b + w'c) = 0 \end{array}$$

und den drei Pascalschen Sechsecken (11) entsprechen der Reihe nach die drei Pascalschen Linien ϱ'' ϱ' ϱ:

$$(22)\ \ldots \quad \begin{array}{l} (u - vw)a - (v - uw)b = 0 \qquad (w - uv)c - (u - vw)a = 0 \\ (v - wu)\,b - (w - vu)\,c = 0. \end{array}$$

Auch in dieser Form der Gleichungen der sechs Pascalschen Linien ist es leicht zu erkennen, dass die drei Pascalschen Li-

Digitized by Google

nien r sich in einem Punkte schneiden, ebenso, dass die drei Pascalschen Linien ϱ sich in einem Punkte schneiden.

Die Symbole der ungeraden Seiten a', b', c' des Pascalschen Sechsecks haben wir in (18) ausgedrückt durch die Symbole $a\ b\ c$ der geraden Seiten. Wir sehen, dass diese Ausdrücke (18) übergehen in die Symbole (20) der drei Diagonalen, wenn wir für alle Constanten u, v, w respective setzen ihre reciproken Werthe u', v', w'.

Wir behaupten nun, dass die Ausdrücke (18) der Symbole für die ungeraden Seiten des Pascalschen Sechsecks nicht allein übergehen in die Symbole für die drei Diagonalen, sondern auch in die Symbole der noch fehlenden sechs geraden Linien, welche irgend zwei Ecken des Pascalschen Sechsecks verbinden, wenn man für u, v, w zugleich oder einzeln setzt u', v', w'.

Wir wiederholen nur unsere Behauptung, wenn wir sie im Einklang mit der Figur mit Einführung treffenderer symbolischer Bezeichnungen also ausdrücken:

$$
\begin{array}{lll}
 & [12]\equiv [45]+w[23]+v[61] & [36]\equiv [45]+w'[23]+v'[61] \\
(23) & [56]\equiv w[45]+ [23]+u[61] & [14]\equiv w'[45]+ [23]+u'[61] \\
 & [34]\equiv v[45]+u[23]+ [61] & [25]\equiv v'[45]+u'[23]+ [61]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & [12]\equiv [45]+w[23]+v[61] & [36]\equiv [45]+w'[23]+v'[61] \\
(24) & [46]\equiv w[45]+ [23]+u'[61] & [15]\equiv w'[45]+ [23]+u[61] \\
 & [35]\equiv v[45]+u'[23]+ [61] & [24]\equiv v'[45]+u[23]+ [61]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & [13]\equiv [45]+w[23]+v'[61] & [26]\equiv [45]+w'[23]+v[61] \\
(25) & [56]\equiv w[45]+ [23]+u[61] & [14]\equiv w'[45]+ [23]+u'[61] \\
 & [24]\equiv v'[45]+u[23]+ [61] & [35]\equiv v[45]+u'[23]+ [61]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & [26]\equiv [45]+w'[23]+v[61] & [13]\equiv [45]+w[23]+v'[61] \\
(26) & [15]\equiv w'[45]+ [23]+u[61] & [46]\equiv w[45]+ [23]+u'[61] \\
 & [34]\equiv v[45]+u[23]+ [61] & [25]\equiv v'[45]+u'[23]+ [61]
\end{array}
$$

Die identischen Gleichungen (23) sind nichts anders als die Wiederholung der identischen Gleichungen (18) und (20), wenn man für die früheren Symbole der geraden, der ungeraden Seiten, und der drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks in Uebereinstimmung mit der Figur die Symbole einführt:

Digitized by Google

$$a \equiv [45] \quad b \equiv [23] \quad c \equiv [61] \quad a' \equiv [12] \quad b' \equiv [56] \quad c' \equiv [34]$$
$$a'' \equiv [36] \quad b'' \equiv [14] \quad c'' \equiv [35].$$

Die übrigen identischen Gleichungen drücken mit Wiederholung der Symbole für die ungeraden Seiten und der drei Diagonalen des Pascalschen Sechsecks alle übrigen Verbindungslinien je zweier Ecken des Pascalschen Sechsecks doppelt aus als lineare Functionen der Symbole der geraden Seiten.

Wir beweisen diese Behauptung nur an der zweiten Gleichung (24), weil der gleiche Beweis sich an allen übrigen wiederholt. Ziehen wir nämlich von der genannten Gleichung (24) die zweite Gleichung (23) ab, so sehen wir, dass das Symbol [46] linear zusammengesetzt ist aus den Symbolen [56] und [61], woraus folgt, dass die gerade Linie $[46] = 0$ durch den Eckpunkt 6 des Sechsecks geht. Multipliciren wir dagegen die dritte Gleichung (23) mit u' und ziehen sie von der zweiten Gleichung (24) ab, so sehen wir, dass dasselbe Symbol [46] auch aus den Symbolen [45] und [34] zusammengesetzt ist, dass also jene gerade Linie $[46] = 0$ auch durch die Ecke 4 des Pascalschen Sechsecks geht. Da die gerade Linie $[46] = 0$ die Ecken 4 und 6 des Sechsecks verbindet, so ist auch das Symbol [46] für dieselbe gewählt. Gleiches gilt von den übrigen Symbolen.

Die Lösung der oben gestellten Aufgabe besteht demnach einfach darin, dass man die 15 eingeführten Symbole $[\varkappa\lambda]$ einzeln gleich 0 setzt. Die dadurch entstehenden Gleichungen drücken die gesuchten 15 geraden Linien aus. Die identischen Gleichungen (23) — (26) lassen die Zusammensetzung jener Gleichungen erkennen aus drei von ihnen mit Zuziehung von nur drei Constanten u, v, w, da u', v', w' die reciproken Werthe der ersteren sind.

Wir heben noch hervor, dass der grosse Apparat, den wir in den Systemen identischer Gleichungen (23) — (26) niedergelegt haben, sich durch irgend eines von jenen Systemen, zum Beispiel durch das erste System, welches nur eine andere Ausdrucksweise der Gleichungen (18) und (20) ist, und eine Bildungsregel für die übrigen ersetzen lässt.

Man sieht nämlich, dass die drei Symbole [45], [23], [61], durch welche die 12 anderen ausgedrückt wurden, durch die Vertauschungen der Zahlen:

Digitized by Google

4 mit 5, 2 mit 3, 6 mit 1

ungeändert bleiben, während die übrigen 12 sich theilweise ändern.

Es gehen die sechs Symbole, welche in den Gleichungen (23) durch jene drei Symbole ausgedrückt sind, durch die angegebenen Vertauschungen der Reihe nach über in die durch (24), (25), (26) ausgedrückten Symbole. Damit aber auch jene Gleichungen (24), (25), (26) richtig bleiben, hat man noch die entsprechenden Vertauschungen zu maehen:

u mit u', v mit v', w mit w'.

Wir können deshalb sagen: Man erhält aus jedem der vier Systeme identischer Gleichungen (23) — (26) die drei übrigen, wenn man in demselben die Vertauschungen macht:

(I) . . . . . 4 mit 5 und u mit u'

(II) . . . . . 2 mit 3 und v mit v'

(III) . . . . . 6 mit 1 und w mit w'.

Schliesslich wiederholen wir zu weiterem Gebrauch nach Einführung der neuen Symbole die Gleichungen (21) und (22) der drei Pascalschen Linien r'' r' r:

$$(27)\quad \begin{array}{c} u'[45]+v'[23]+w'[61]=0 \qquad u[45]+v[23]+w[61]=0 \\ \Big\{u[45]+v[23]+w[61]\Big\}+uvw\Big\{u'[45]+v'[23]+w'[61]\Big\}=0 \end{array}$$

und der drei Pascalschen Linien ϱ'' ϱ' ϱ:

$$(28)\quad \begin{array}{c} (u-vw)[45]-(v-wu)[23]=0, \quad (w-uv)[61]-(u-vw)[45]=0 \\ (v-wu)[23]-(w-uv)[61]=0, \end{array}$$

welche der Reihe nach den Pascalschen Sechsecken (10) und (11) zugehören.

Nach dieser Voruntersuchung kommen wir nun auf die oben erwähnte Frage nach den Eigenschaften der 60 Sechsecke zurück, welche sechs gegebene Ecken haben, wenn eines derselben ein Pascalsches Sechseck ist.

Das eine Pascalsche Sechseck von den 60 Sechsecken mit den gegebenen sechs Ecken sei das Sechseck 123456, oder $\frac{135}{462}$, von welchem die Symbole der ungeraden Seiten und der drei

Digitized by Google

Diagonalen in den identischen Gleichungen (23) durch die Symbole der geraden Seiten ausgedrückt vorliegen. Wir fanden mit Einschluss des genannten Pascalschen Sechsecks sechs Pascalsche Sechsecke, welche die gegebenen Ecken 123456 haben, nämlich die Sechsecke (10) und (11). Wir bezeichnen sie kürzer, indem wir die drei ersten, ebenso die drei anderen zusammenfassen mit den Zeichen:

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots \left[\frac{135}{462}\right] \left[\frac{135}{642}\right]$$

aus welchen man die früheren (10) und (11) wieder herstellen kann durch cyclische Vertauschung der Zahlen des Nenners oder auch des Zählers.

Wie diese sechs Pascalsche Sechsecke aus dem System Gleichungen (23) hervorgingen, so gehen aus jedem der vier Systeme Gleichungen (23) — (26) sechs Pascalsche Sechsecke hervor, und wie aus dem Systeme (23) durch die Vertauschungen (I), (II), (III) die übrigen Systeme erhalten werden, so erhält man aus (29) durch dieselben Vertauschungen die 18 Pascalschen Sechsecke:

$$(30) \ldots \left[\frac{134}{562}\right] \left[\frac{134}{652}\right] \quad \left[\frac{125}{463}\right] \left[\frac{125}{643}\right] \quad \left[\frac{635}{412}\right] \left[\frac{635}{142}\right].$$

Kehren wir wieder zu den sechs Pascalschen Sechsecken (29) zurück, legen aber die ungeraden Seiten des Pascalschen Sechsecks 123456, deren Gleichungen sind $[12] = 0$, $[34] = 0$, $[56] = 0$, zum Grunde, wie vorhin die geraden Seiten und bemerken, dass die angegebenen Gleichungen sich durch die Vertauschungen:

(IV) . . . . . 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6

nicht ändern, so erhalten wir durch diese Vertauschungen aus (29) die 18 Pascalschen Sechsecke:

$$(31) \ldots \left[\frac{235}{461}\right] \left[\frac{235}{641}\right] \quad \left[\frac{145}{362}\right] \left[\frac{145}{632}\right] \quad \left[\frac{136}{452}\right] \left[\frac{136}{542}\right].$$

Legen wir endlich die Diagonalen $[14] = 0$, $[25] = 0$, $[36] = 0$ zum Grunde, so erhalten wir aus (29) durch die Vertauschungen:

(V) . . . . . 1 mit 4, 2 mit 5, 3 mit 6

Digitized by Google

die 18 Pascalschen Sechsecke:

$$(32) \ldots \left[\frac{435}{162}\right] \left[\frac{435}{612}\right] \quad \left[\frac{132}{465}\right] \left[\frac{132}{645}\right] \quad \left[\frac{165}{432}\right] \left[\frac{165}{342}\right].$$

Die Gesammtzahl dieser verschiedenen Pascalschen Sechsecke mit den Ecken 123456 ist 60. Demnach haben wir im Anschluss an die oben aufgestellten Sätze folgende Erweiterungen:

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke mit sechs gegebenen Ecken. Sie sind sämmtlich Pascalsche Sechsecke, wenn eines derselben ein Pascalsches Sechseck ist.

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke mit sechs gegebenen Linien als Seiten. Sie sind sämmtlich Brianchonsche Sechsecke, wenn eines derselben ein Brianchonsches Sechseck ist.

Diese 60 Pascalschen Sechsecke mit denselben sechs Ecken gruppiren sich, wie man sieht, zwanzig Mal zu dreien. Da nun die Pascalschen Linien jeder Gruppe sich in einem Steinerschen Punkte S schneiden, so hat man in dem Systeme der 60 Pascalschen Sechsecke mit denselben sechs Ecken 20 Steinersche Punkte S.

Wir werden, um die Lage der 20 Punkte S näher zu untersuchen, zweckmässig jeden Punkt S mit demselben Symbol bezeichnen, welches der Ausdruck von drei Pascalschen Sechsecken war, deren Pascalsche Linien sich in einem Steinerschen Punkte S schneiden.

In dieser Voraussetzung stellt das Symbol:

$$(33) \ldots \ldots \ldots \ldots \left[\frac{135}{462}\right]$$

den Steinerschen Punkt S dar, in welchem sich die drei Pascalschen Linien (27) schneiden.

Addiren wir die beiden ersten Gleichungen (27), so erhalten wir:

$$(34) \ldots \quad (u + u')\,[45] + (v + v')\,[23] + (w + w')\,[61] = 0$$

die Gleichung einer bestimmten geraden Linie R, welche durch jenen Steinerschen Punkt S (33) geht.

Digitized by Google

Durch die Vertauschungen (I) (II) (III) ändert sich die Gleichung (34) nicht, während das Symbol (33) des Steinerschen Punktes S übergeht in die Symbole von drei anderen Steinerschen Punkten S:

(35) . . . . . $\left[\frac{134}{562}\right] \quad \left[\frac{125}{463}\right] \quad \left[\frac{635}{412}\right]$.

Wir schliessen hieraus, dass die genannten vier Steinerschen Punkte (33) und (35) auf einer und derselben geraden Linie (34) liegen, der Steinerschen geraden Linie R.

Solcher Steinerschen geraden Linien R, auf welchen vier Punkte S liegen, giebt es mehrere in dem Systeme. Auf einer zweiten geraden Linie R liegt der Punkt (33) und die vier Punkte, deren Symbole aus dem genannten durch die Vertauschungen (IV) hervorgehen:

(36) . . . . . $\left[\frac{235}{461}\right] \quad \left[\frac{145}{362}\right] \quad \left[\frac{136}{452}\right]$.

Auf einer dritten geraden Linie R liegt der Punkt (33) und die Punkte, deren Symbole aus (33) durch die Vertauschungen (V) erhalten werden:

(37) . . . . . $\left[\frac{435}{162}\right] \quad \left[\frac{165}{432}\right] \quad \left[\frac{132}{465}\right]$.

Wir können daher sagen, dass in jedem der 20 Steinerschen Punkte S sich drei Steinersche gerade Linien R schneiden.

Um die Zahl der verschiedenen Steinerschen Linien R zu ermitteln, bemerken wir, dass wir unserer analytischen Untersuchung die geraden Linien $[45] = 0$, $[23] = 0$, $[61] = 0$ zum Grunde gelegt haben, das sind drei gerade Linien, welche durch sämmtliche Ecken der Pascalschen Sechsecke gehen. Die Untersuchung führte schliesslich auf die Steinersche Linie (34). Man kann aber von jeden drei geraden Linien ausgehen, welche durch die sechs Ecken des Pascalschen Sechsecks gelegt sind und wird jedes Mal auf eine Steinersche Linie R hinauskommen. Man hat demnach soviel Steinersche Linien R, als wie viel Mal sich drei gerade Linien durch sechs Punkte legen lassen, nämlich 15 Mal. Es ist demnach 15 die Zahl der verschiedenen Steinerschen Linien R, auf deren jeder vier Steinersche Punkte S liegen.

Digitized by Google

Wir haben 15 Linien R und 20 Punkte S. In jedem Punkte S schneiden sich drei Linien R und auf jeder Linie R liegen vier Punkte S. Es sind das dieselben Elemente, aus welchen die oben discutirte Figur des Satzes von den drei Dreiecken besteht, welche dreien von einem Punkte ausgehenden geraden Linien einbeschrieben sind. Die 15 geraden Linien R und die 20 Punkte S bilden die dort beschriebene Figur.

Man kann sich davon auch direct überzeugen; denn man ist nach dem Vorhergehenden in der Lage, 15 Mal die vier von den in (29) — (32) symbolisch dargestellten 20 Steinerschen Punkten S zusammenzustellen, welche in einer jeden der 15 Steinerschen Linien R liegen.

Elfte Vorlesung.

Der Kreis.

Wir haben bereits in der ersten Vorlesung die Gleichung des Kreises abgeleitet. Wir erhalten dieselbe, wenn wir von dem Quadrat der Entfernung eines variabeln Punktes $x\,y$ von einem gegebenen Punkte $a\,b$ das Quadrat des Radius r abziehen und die Differenz gleich 0 setzen:

$$(1) \ldots\ldots (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Diese Form der Kreisgleichung, gleichviel ob unentwickelt oder entwickelt, werden wir die Normalform nennen zum Unterschiede von der allgemeinen Form, welche aus der Multiplication jener Gleichung mit einem beliebigen constanten Factor hervorgeht. Ein Criterium für die entwickelte Kreisgleichung in der Normalform ist hiernach, dass sowohl der Coefficient von x^2 als der von y^2 gleich der Einheit ist, während in der allgemeinen Form diese Coefficienten nur einander gleich sind.

Digitized by Google

Wenn wir in dem linken Theile der Gleichung (1) unter x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes p verstehen, der nicht in der Peripherie des Kreises liegt, so drückt die Summe der beiden ersten Glieder das Quadrat der Entfernung d des Punktes p von dem Centrum c des Kreises aus. Der linke Theil der Gleichung (1) wird demnach gleich:

$$(d + r)(d - r)$$

gleich dem Produkt der beiden Abschnitte, welche der Kreis auf der geraden Linie pc von p aus gerechnet macht. Da dieses Produkt bekanntlich gleich ist dem Quadrat der von dem Punkte p an den Kreis gezogenen Tangente, so haben wir den Satz:

Wenn man den linken Theil einer in der Normalform gegebenen Kreisgleichung von seinem rechten Theile, der $= 0$ ist, trennt, so drückt derselbe das Quadrat der Tangente aus, welche von einem beliebigen, durch die Coordinaten x, y gegebenen, Punkte an den Kreis gezogen ist.

Die entwickelte Kreisgleichung ist im Allgemeinen von der Form:

$$(2) \ldots \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Aber nicht jede Gleichung von dieser Form stellt analytisch einen Kreis dar. Es wird sich der linke Theil dieser Gleichung auf die Form des linken Theiles der Gleichung (1), multiplicirt mit einem noch zu bestimmenden Factor λ, zurückführen lassen müssen, wenn die Gleichung (2) die eines Kreises sein soll. Dieses trifft zu unter den Bedingungen:

$$\lambda = A \qquad 0 = B \qquad \lambda = C$$
$$-2\lambda a = D \quad -2\lambda b = E \quad \lambda(a^2 + b^2 - r^2) = F.$$

Eliminirt man aus diesen sechs Gleichungen die vier Unbekannten a, b, r, λ, so erhält man die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (2) einen Kreis darstellt:

$$(3) \ldots \ldots \ldots \quad A = C \quad B = 0.$$

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt werden, stellt die Gleichung (2) immer einen Kreis dar. Denn wir finden unter diesen Bedingungen die Werthe der Unbekannten:

Digitized by Google

$$(4) \ldots \quad \lambda = A \quad a = \frac{-D}{2A} \quad b = \frac{-E}{2A} \quad r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Es kann sich freilich ereignen, dass der Werth des Radius r des Kreises imaginär wird, jedoch werden wir auch imaginäre Kreise in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

In die Gleichung (1) des Kreises führt man die homogenen Coordinaten ein, wenn man für x und y setzt $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und mit z^2 multiplicirt, wodurch man erhält:

$$(5) \ldots \quad (x - az)^2 + (y - bz)^2 - r^2 z^2 = 0.$$

Dieser homogenen Gleichung des Kreises werden wir uns mit Vortheil bedienen, um die Aufgabe zu lösen:

Die Gleichung (1) eines Kreises und die Coordinaten $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ irgend zweier Punkte 0 und 1 sind gegeben, die Coordinaten der Schnittpunkte zu bestimmen, in welchen die Verbindungslinie der gegebenen Punkte den Kreis schneidet.

Die homogenen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Verbindungslinie sind bekanntlich:

$$(6) \ldots \quad x = x_0 - \lambda x_1 \quad y = y_0 - \lambda y_1 \quad z = 1 - \lambda.$$

Es wird der beliebige Punkt der Verbindungslinie der Schnittpunkt derselben mit dem Kreise, wenn die Werthe von x, y, z aus (6) in die homogene Gleichung (5) des Kreises gesetzt der Gleichung genügen. Die letztere wird dabei eine quadratische Gleichung in λ:

$$(7) \ldots \ldots \ldots \quad \alpha\lambda^2 - 2\beta\lambda + \gamma = 0,$$

indem man hat:

$$(8) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha &= (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 \\ \beta &= (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) - r^2 \\ \gamma &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2. \end{aligned}$$

Löset man nun die quadratische Gleichung (7) auf und setzt für λ in (6) die eine oder die andere Wurzel, so hat man die homogenen Coordinaten der gesuchten Schnittpunkte.

Digitized by Google

Das Schnittpunktepaar ist harmonisch mit dem gegebenen Punktepaar, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind, was man aus den Werthen (6) der Coordinaten der Schnittpunkte ersehen kann. Die Bedingung für ein gegebenes Punktepaar der Art ist demnach $\beta = 0$.

Man nennt zwei Punkte, deren Verbindungslinie den Kreis in einem Punktepaar schneidet, welches harmonisch ist mit den beiden Punkten, harmonische Pole des Kreises. Die Bedingung $\beta = 0$ zwischen den Coordinaten x, y des einen und x_1, y_1 des anderen Poles wird demnach:

$$(9) \ldots \quad (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) - r^2 = 0.$$

Es ist dieses zugleich die Gleichung einer geraden Linie, auf welcher der eine Pol variirt, wenn der andere unverändert bleibt; mit anderen Worten:

Der geometrische Ort des, einem gegebenen Punkte zugeordneten, harmonischen Poles des Kreises ist eine gerade Linie.

Diese gerade Linie führt den Namen der Polare des gegebenen Punktes und der gegebene Punkt den Namen des Poles der geraden Linie. Die Gleichung (9) stellt also die Polare des durch seine Coordinaten $x_1 y_1$ gegebenen Punktes dar.

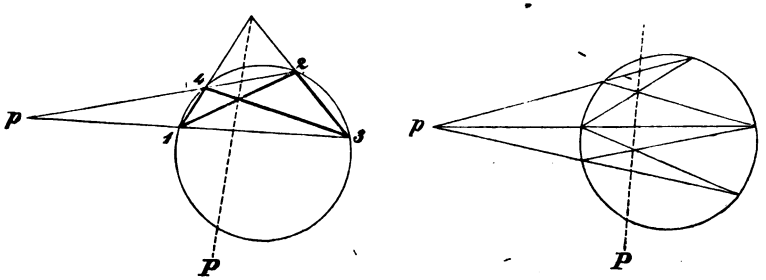
Man construirt hiernach die Polare eines gegebenen Punktes, indem man durch den gegebenen Punkt irgend zwei gerade Linien zieht und auf jeder derselben zu dem Schnittpunktepaar des Kreises und dem gegebenen Punkte den vierten harmonischen Punkt fixirt. Die Verbindungslinie der vierten harmonischen Punkte wird die gesuchte Polare sein. Sind im Speciellen jene beiden durch den gegebenen Punkt gezogenen geraden Linien Tangenten des Kreises, so werden die vierten harmonischen Punkte auf ihnen die Berührungspunkte der Tangenten, und die Polare des gegebenen Punktes stellt sich dar als die Verbindungslinie der Berührungspunkte der von dem gegebenen Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten.

Durch die geringste Zahl von geraden Linien ist die ange-

Digitized by Google

deutete Construction in der ersten Figur ausgeführt, in welcher von dem gegebenen Punkte p zwei beliebige gerade Linien ausgehen, die den Kreis in den Punkten 1, 3 und 4, 2 treffen. Die

Fig. 11.



punktirte gerade Linie P, welche die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks 1234 verbindet, ist die gesuchte Polare des gegebenen Punktes p, weil sie die beiden von dem Punkte p ausgehenden geraden Linien in den vierten harmonischen Punkten schneidet. Der Beweis davon beruht auf dem Satze, dass in einem vervollständigten Viereck 1234 jede Diagonale von den beiden anderen Diagonalen harmonisch geschnitten wird.

Eine andere Ausführung der Construction in der zweiten Figur, in welcher von dem gegebenen Punkte p drei beliebige gerade Linien ausgehen, ist begründet durch die erste.

Aus der angegebenen Construction wird ersichtlich, dass die Polare eines Punktes immer senkrecht steht auf der geraden Linie, welche den Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet. Es ergiebt sich ferner daraus, dass die Polare des Mittelpunktes eines Kreises eine gerade Linie im Unendlichen ist.

Wählen wir auf der Polare (9) des gegebenen Punktes 1 einen beliebigen Punkt 0, so genügen seine Coordinaten $x_0\, y_0$ jener Gleichung und man hat:

$$(x_0 - a)\,(x_1 - a) + (y_0 - b)\,(y_1 - b) - r^2 = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung genügen aber auch die Coordinaten $x_1\, y_1$ des Punktes 1 der Gleichung der Polare des gewählten Punktes 0:

$$(x - a)\,(x_0 - a) + (y - b)\,(y_0 - b) - r^2 = 0.$$

Digitized by Google

Wir können deshalb sagen:

Harmonische Pole eines Kreises haben die charakteristische Eigenschaft, dass die Polare des einen durch den anderen geht.

Fixiren wir auf einer geraden Linie mehrere Punkte, so ist jeder derselben harmonischer Pol zum Pole der geraden Linie. Nach dem letzten Satze schneiden sich die Polaren der fixirten Punkte in dem Pole der geraden Linie. Wir haben demnach den Satz, welcher dient den Pol einer gegebenen geraden Linie zu construiren:

Wenn ein Punkt eine gerade Linie durchläuft, so dreht sich seine Polare um den Pol der geraden Linie.

Wir können den Satz auch umkehren wie folgt:

Wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt auf ihr dreht, so beschreibt der Pol der geraden Linie die Polare des festen Punktes.

Denn zieht man durch den festen Punkt eine gerade Linie, so bildet der Pol derselben und der feste Punkt ein Polenpaar. Da aber die Polare des einen durch den anderen geht, so liegt der Pol der geraden Linie auf der Polare des festen Punktes.

Wenn der Pol in der Peripherie des Kreises liegt, so ist seine Polare Tangente des Kreises in dem Pol.

Zieht man nämlich durch den Pol, der in der Peripherie des Kreises liegt, um seine Polare zu construiren, Secanten des Kreises, so wird der vierte harmonische Punkt auf ihnen immer mit dem Pole zusammenfallen. Nur in dem Falle, wenn die Secante Tangente wird, fällt der vierte harmonische Punkt nicht mit dem Pole zusammen, sondern kann jeder beliebige Punkt der Tangente sein. Da nun der geometrische Ort der vierten harmonischen Punkte die Polare ist, so ist in dem vorliegenden Falle die Polare Tangente des Kreises. Es ist demnach die Gleichung (9) die Gleichung der Tangente des Kreises in dem Punkte seiner Peripherie, dessen Coordinaten x_1, y_1 sind.

Wir kehren zurück zu der quadratischen Gleichung (7), von welcher die Bestimmung der Schnittpunkte der geraden Linie 01

Digitized by Google

und des Kreises abhängt. Die gerade Linie 01 wird Tangente des Kreises, wenn die Schnittpunkte zusammenfallen, das ist, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung (7) gleich werden. Die Wurzeln derselben werden aber einander gleich unter der Bedingung $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$. Unter dieser Bedingung wird also die gerade Linie 01 Tangente des Kreises. Betrachten wir nun den Punkt 1 als gegeben, so wird der geometrische Ort des Punktes 0, dessen Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte 1 eine Tangente des Kreises ist, das Tangentenpaar, welches sich von dem Punkte 1 an den Kreis legen lässt. Setzen wir demnach in die Bedingungsgleichung $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ die Werthe (8), und für x_0 und y_0 die Variabeln, so erhalten wir die Gleichung des Tangentenpaares vom Punkte 1 an den Kreis gelegt:

$$(10) \quad \begin{aligned} &\{(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2\}^2 \\ &-\{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2\}\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}=0. \end{aligned}$$

Dass diese Gleichung ein Linienpaar darstellt, welches von dem Punkte 1 ausgeht, davon kann man sich nachträglich dadurch überzeugen, dass man die Gleichung (10) durch Entwickelung auf die Form (1) der achten Vorlesung bringt, die Werthe der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ berechnet und sie in die Gleichungen (4) jener Vorlesung, den Bedingungen für ein vom Punkte 1 ausgehendes Linienpaar, einsetzt. Man wird sehen, dass jene Bedingungsgleichungen erfüllt werden. Doch halten wir diese Probe nach dem Vorhergehenden für überflüssig.

Wie ein Kreis durch die Punkte in seiner Peripherie bestimmt ist, so wird derselbe auch bestimmt sein durch seine Tangenten. Betrachten wir demnach den Kreis als gegeben durch seine Tangenten und operiren mit diesen Tangenten wie vorhin mit den Punkten in der Peripherie des Kreises, so ergiebt sich daraus eine neue analoge Behandlungsweise des Kreises. Wir beginnen dieselbe mit der Aufgabe:

Die Bedingung zwischen den Coordinaten u, v einer geraden Linie zu bestimmen, unter welcher die gerade Linie Tangente des Kreises ist, dessen Mittelpunkt durch seine Coordinaten a, b und dessen Radius r gegeben seien.

Digitized by Google

Die in Punktcoordinaten gegebene Gleichung einer geraden Linie:

$$ux + vy + 1 = 0$$

wird Tangentengleichung des Kreises, wenn der senkrechte Abstand der geraden Linie von dem Mittelpunkte des Kreises gleich dem Radius ist. Drücken wir daher den senkrechten Abstand von dem Mittelpunkte nach den bekannten Regeln aus:

$$\frac{ua + vb + 1}{\sqrt{(u^2 + v^2)}}$$

und setzen ihn $= r$, so haben wir die gesuchte Bedingung, die sich durch Quadrirung beider Theile der Gleichung auf die Form bringen lässt:

$$(11) \ldots \quad (au + bv + 1)^2 - r^2 (u^2 + v^2) = 0.$$

Wir nennen diese Gleichung die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten, indem wir darunter die Relation verstehen, welche die Coordinaten u, v einer geraden Linie zu erfüllen haben, wenn sie Tangente des Kreises sein soll. Die Coordinaten jeder beliebigen Tangente des Kreises genügen der Gleichung, wie umgekehrt jede gerade Linie, deren Coordinaten der Gleichung genügen, Tangente des Kreises ist.

Die Gleichung (11) repräsentirt die Normalform, welche von der allgemeinen Form der Kreisgleichung in Liniencoordinaten sich nur durch einen constanten Factor unterscheidet.

Der Vollständigkeit wegen führen wir den folgenden Satz an, der sich nach dem Vorhergehenden von selbst versteht:

Wenn man den linken Theil einer in der Normalform gegebenen Kreisgleichung in Liniencoordinaten von seinem rechten Theile, der $= 0$ ist, trennt, ihn hierauf durch $u^2 + v^2$ dividirt, so stellt der Quotient die Differenz des Quadrates des senkrechten Abstandes einer durch ihre Coordinaten $u\,v$ gegebenen geraden Linie von dem Mittelpunkte des Kreises und des Quadrates des Radius dar.

Diese Differenz ist gleich dem Quadrat der Tangente, welche von dem Fusspunkte des Lothes, welches von dem Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene gerade Linie gefällt ist, an den

Digitized by Google

Kreis gelegt werden kann. Kürzer können wir sagen, dass jene Differenz das Quadrat der kürzesten Tangente darstelle, welche von einem variabeln Punkte der gegebenen geraden Linie an den Kreis gezogen werden kann.

Die entwickelte Kreisgleichung (11) hat die Form:

$$(12) \ldots \quad Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0.$$

Da diese Gleichung sechs Constanten enthält, die mit einem beliebigen Factor λ multiplicirte Gleichung (11) aber nur vier Constanten, so müssen zwischen jenen sechs Constanten zwei Relationen obwalten, wenn die Gleichung (12) einen Kreis darstellen soll. Diese Relationen werden wir feststellen.

Setzen wir zu diesem Zwecke die Coefficienten in (12) den entsprechenden mit λ multiplicirten Coefficienten in der Entwickelung von (11) einander gleich, so erhalten wir:

$$\lambda(a^2 - r^2) = A \quad 2\lambda ab = B \quad \lambda(b^2 - r^2) = C$$
$$2\lambda a = D \quad 2\lambda b = E \quad \lambda = F.$$

Durch Elimination der Unbekannten λ, a, b, r erhalten wir die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (12) in Liniencoordinaten einen Kreis darstellt:

$$(13) \ldots \quad DE - 2BF = 0, \quad D^2 - 4AF = E^2 - 4CF.$$

Die Coordinaten a, b des Mittelpunktes und r der Radius des Kreises werden unter diesen Bedingungen aus obigen sechs Gleichungen gefunden:

$$(14) \ldots \quad a = \frac{D}{2F} \quad b = \frac{E}{2F} \quad r^2 = \frac{D^2 - 4AF}{4F^2} = \frac{E^2 - 4CF}{4F^2}.$$

Durch Einführung der homogenen Liniencoordinaten geht die Gleichung (11) des Kreises über in:

$$(15) \ldots \quad (au + bv + w)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0,$$

eine bequemere Form für die Behandlung der folgenden Aufgabe:

Die Gleichung (15) eines Kreises und die Coordinaten u_0, v_0 und u_1, v_1 irgend zweier geraden Linien 0 und 1 sind gegeben, die Coordinaten der Tangenten zu bestimmen, welche sich von dem Schnittpunkte der gegebenen geraden Linien an den Kreis ziehen lassen.

Digitized by Google

Die homogenen Coordinaten u, v, w irgend einer geraden Linie, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen geht, sind bekanntlich:

$$(16) \ldots \quad u = u_0 - \lambda u_1 \quad v = v_0 - \lambda v_1 \quad w = 1 - \lambda.$$

Soll diese gerade Linie Tangente des Kreises werden, so muss man den willkürlichen Factor λ so bestimmen, dass die Werthe von u, v, w aus (16) in (15) eingesetzt der Gleichung genügen. Dieses führt auf die quadratische Gleichung:

$$(17) \ldots \ldots \quad A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0,$$

indem man hat:

$$(18) \quad \begin{aligned} A &= (au_1 + bv_1 + 1)^2 - r^2 (u_1^2 + v_1^2) \\ B &= (au_0 + bv_0 + 1)(au_1 + bv_1 + 1) - r^2 (u_0 u_1 + v_0 v_1) \\ C &= (au_0 + bv_0 + 1)^2 - r^2 (u_0^2 + v_0^2). \end{aligned}$$

Löset man die quadratische Gleichung (17) auf und setzt in (16) für λ die eine oder die andere Wurzel, so hat man die homogenen Coordinaten der gesuchten Tangenten des Kreises.

Aus jenen Werthen (16) der homogenen Coordinaten ist ersichtlich, dass das gegebene Linienpaar harmonisch ist mit dem Tangentenpaare, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind, das heisst unter der Bedingung $B = 0$.

Zwei gerade Linien, die harmonisch sind mit dem Tangentenpaar, welches sich von dem Schnittpunkt der geraden Linien an den Kreis legen lässt, heissen harmonische Polaren des Kreises. Die Bedingung $B = 0$ zwischen den Coordinaten u, v der einen und u_1, v_1 der andern ihr zugeordneten Polare des Kreises ist demnach:

$$(19) \ldots \quad (au + bv + 1)(au_1 + bv_1 + 1) - r^2 (uu_1 + vv_1) = 0.$$

Es ist dieses die Gleichung eines Punktes, durch welchen alle einer gegebenen geraden Linie 1 zugeordneten harmonischen Polaren gehen. Um ihn zu bestimmen, ziehen wir in einem der Schnittpunkte der gegebenen geraden Linie 1 und des Kreises eine Tangente an letzteren. Diese Tangente und die gegebene gerade Linie 1 sind harmonische Polaren nach der Definition der

Digitized by Google

harmonischen Polaren. Die Tangente in dem zweiten Schnittpunkte und die gegebene gerade Linie 1 sind wieder harmonische Polaren. Jede dieser Tangenten ist also harmonische Polare zur gegebenen geraden Linie 1, der Schnittpunkt der Tangenten also der gesuchte Punkt. Da aber der Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kreises der Pol der geraden Linie ist, welche die Berührungspunkte verbindet, so ist der gesuchte Punkt der Pol der gegebenen geraden Linie 1 und wir haben damit den Satz bewiesen:

Alle einer gegebenen geraden Linie zugeordneten harmonischen Polaren eines Kreises schneiden sich in dem Pole der gegebenen geraden Linie,

oder mit anderen Worten:

Harmonische Polaren eines Kreises haben die charakteristische Eigenschaft, dass der Pol der einen auf der anderen liegt.

Die Gleichung (19) stellt hiernach den Pol dar der durch die Coordinaten u_1 v_1 gegebenen geraden Linie.

Wir haben bis dahin nur den Fall discutirt, wenn die quadratische Gleichung (17), von welcher die Bestimmung des Tangentenpaares abhängt, welches von dem Schnittpunkte zweier gegebenen geraden Linien 0 und 1 an den Kreis gezogen werden kann, gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen hat. Es bleibt noch übrig, den Fall gleicher Wurzeln zu untersuchen.

Dieser Fall tritt ein, wenn $B^2 - AC = 0$. Unter dieser Bedingung werden zwei gerade Linien 0 und 1 sich in einem Punkte schneiden, von dem aus die beiden an den Kreis gezogenen Tangenten zusammenfallen. Die geometrische Anschauung lehrt, dass dann der Schnittpunkt in der Peripherie des Kreises liegen muss. Es ist demnach jene Gleichung die Bedingung, unter welcher zwei durch ihre Coordinaten gegebene gerade Linien 0 und 1 sich in einem Punkte der Peripherie des Kreises schneiden.

Betrachten wir nun die gerade Linie 1 als eine gegebene, die andere als gesucht und setzen u, v für u_0, v_0, so haben wir mit Rücksicht auf (18) die Bedingungsgleichung:

Digitized by Google

$$(20)\quad \begin{aligned}&\{(au+bv+1)(au_1+bv_1+1)-r^2(uu_1+vv_1)\}^2\\ &-\{(au+bv+1)^2-r^2(u^2+v^2)\}\{(au_1+bv_1+1)^2-r^2(u_1^2+v_1^2)\}=0.\end{aligned}$$

Es giebt aber auf der gegebenen geraden Linie 1 zwei Punkte, von welchen die an den Kreis gezogenen Tangenten jedes Mal zusammenfallen, das sind die Schnittpunkte der gegebenen geraden Linie 1 und des Kreises. Die Coordinaten u, v in der Gleichung (20) müssen also geraden Linien angehören, welche entweder durch den einen Schnittpunkt oder durch den anderen gehen. Die Gleichung (20) stellt demnach das Punktepaar dar, in welchem die gegebene gerade Linie 1 den Kreis schneidet.

Dass die Gleichung (20) wirklich ein Punktepaar auf der geraden Linie 1 darstellt, davon kann man sich zum Ueberflusse überzeugen, wenn man die Gleichung (20) auf die Form (2) der achten Vorlesung bringt und dann die Bedingungen (8) jener Vorlesung für ein Punktepaar aufstellt. Man wird sehen, dass die Bedingungen erfüllt werden.

Zwölfte Vorlesung.

Das System von Kreisen, welche durch die Schnittpunkte zweier Kreise gehen.

Da die Kreisgleichungen alle von derselben Form sind, so bringt es Vortheil, für diese Form ein bestimmtes Symbol k einzuführen. Wir werden deshalb mit k_0, k_1 .... die Ausdrücke bezeichnen:

$$(1)\quad \begin{aligned}k_0 &\equiv (x-a_0)^2+(y-b_0)^2-r_0^2\\ k_1 &\equiv (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Um die Mittelpunkte der Kreise analytisch darzustellen, werden wir uns der Symbole A_0, A_1, ... bedienen:

Digitized by Google

$$A_0 \equiv a_0 u + b_0 v + 1$$
$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Betrachten wir nun zwei durch ihre Gleichungen in der Normalform gegebene Kreise:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k_0 = 0 \quad k_1 = 0$$

und bilden die Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k_0 - \lambda k_1 = 0,$$

so stellt dieselbe wieder einen Kreis dar, weil sie den Bedingungen (3) der vorhergehenden Vorlesung genügt.

Dieser Kreis geht durch jeden der beiden Punkte hindurch, in welchen sich die gegebenen Kreise schneiden. Denn denkt man sich die Coordinaten eines der beiden Schnittpunkte aus den Gleichungen (3) berechnet und setzt sie in k_0 und k_1 ein, so verschwinden diese Ausdrücke. Es verschwindet also auch der linke Theil der Gleichung (4) durch Einsetzen der berechneten Coordinaten und die Gleichung wird erfüllt.

Die Gleichung $k_0 - \lambda k_1 = 0$ stellt das ganze System von Kreisen dar, welche sich in den beiden Punkten schneiden, in welchen sich die gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ schneiden.

Da die erst genannte Gleichung einen willkürlichen Factor λ enthält, so kann man denselben immer so bestimmen, dass der durch die Gleichung repräsentirte Kreis durch einen beliebig gegebenen Punkt geht. Da nun ein bestimmter Kreis des Systemes durch drei Punkte seiner Peripherie, durch die beiden Schnittpunkte der gegebenen Kreise und durch noch einen Punkt bestimmt ist, so wird man den Factor λ so bestimmen können, dass $k_0 - \lambda k_1 = 0$ die Gleichung des bestimmten Kreises wird. Die genannte Gleichung mit dem willkürlichen Factor λ stellt in der That alle Kreise des Systemes ohne Ausnahme dar.

Bestimmen wir nach den Formeln (4) der vorhergehenden Vorlesung die Coordinaten a, b des Mittelpunktes und den Radius r des Kreises (4), so finden wir:

$$(5) \quad a = \frac{a_0 - \lambda a_1}{1 - \lambda} \qquad b = \frac{b_0 - \lambda b_1}{1 - \lambda} \qquad r^2 = \frac{r_1^2 \lambda^2 + \left\{[01]^2 - r_0^2 - r_1^2\right\}\lambda + r_0^2}{(1-\lambda)^2}$$

Digitized by Google

wenn wir mit [01] den Abstand der Mittelpunkte 0 und 1 der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ von einander bezeichnen. Bilden wir nun aus den gefundenen Coordinaten des Mittelpunktes die Gleichung desselben, so können wir mit Hinweisung auf die Bezeichnung (2) auch sagen:

Wenn $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ die Gleichungen zweier gegebenen Kreise in der Normalform sind, $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Mittelpunkte derselben ebenfalls in der Normalform, so ist:

(6) . . . . . $k_0 - \lambda k_1 = 0$

die Gleichung irgend eines Kreises, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise geht, und:

(7) . . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0$

die Gleichung seines Mittelpunktes. Der Radius r desselben wird durch die Formel bestimmt:

(8) . . . . . $r^2 = \frac{r_1^2 \lambda^2 + \{[01]^2 - r_0^2 - r_1^2\} \lambda + r_0^2}{(1-\lambda)^2}$.

Die Gleichung (7) beweiset, dass die Mittelpunkte aller Kreise des Systemes auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der gegebenen Kreise liegen.

Unter den Kreisen des Systemes zeichnet sich ein Kreis besonders aus, dem der Werth $\lambda = 1$ entspricht. Sein Radius ist nach (8) unendlich gross und sein Mittelpunkt (7) fällt in das Unendliche. Ein solcher Kreis muss in dem Theile, der im Endlichen liegt, eine gerade Linie vorstellen. Und in der That sehen wir, dass seine Gleichung:

(9) . . . . . $k_0 - k_1 = 0$

eine gerade Linie darstellt, weil in derselben die Glieder des zweiten Grades ganz fehlen.

Diese durch die Gleichung (9) dargestellte gerade Linie, welche die Schnittpunkte der gegebenen beiden Kreise verbindet, führt den Namen der gemeinschaftlichen Secante der Kreise. Sie ist unter allen Umständen reell und kann, wenn die Kreise sich in reellen Punkten schneiden, leicht construirt werden. Schneiden sich die gegebenen Kreise in imaginären Punk-

Digitized by Google

ten, so bedarf es einer anderen charakteristischen Eigenschaft der gemeinschaftlichen Secante zu ihrer Construction.

Wir können eine charakteristische Eigenschaft der gemeinschaftlichen Secante zweier gegebenen Kreise unmittelbar aus ihrer Gleichung (9) ablesen. Erinnern wir uns nämlich, dass k_0 und k_1 die Quadrate der Längen der von einem Punkte x, y an die gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ gezogenen Tangenten ausdrücken, so sehen wir, dass die Gleichung (9) den geometrischen Ort derjenigen Punkte darstellt, von welchen die Tangenten an die gegebenen Kreise gezogen einander gleich sind. Wir haben demnach den Satz:

Die gemeinschaftliche Secante zweier Kreise ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, von welchen die an die Kreise gezogenen Tangenten einander gleich sind.

Halbirt man daher irgend zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise, so wird die Verbindungslinie der Halbirungspunkte die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise sein, mögen sich die Kreise in reellen oder in imaginären Punkten schneiden. Die Construction der gemeinschaftlichen Secante zweier Kreise, von welchen der eine ganz innerhalb des anderen liegt, macht nach dem angegebenen Satze auch keine Schwierigkeit.

Wie die Gleichung (9) eben geometrisch interpretirt worden ist, so kann man auch die allgemeinere (6) geometrisch deuten, wie folgt:

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, von welchen die Tangenten an zwei gegebene Kreise gezogen ein gegebenes Verhältniss haben, ist ein Kreis, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise geht.

Unter den Kreisen des Systemes (4), welche durch die Schnittpunkte der gegebenen beiden Kreise gehen, zeichnen sich zwei Kreise aus, deren Radien r verschwinden. Setzen wir in (8) $r = 0$, so erhalten wir die in λ quadratische Gleichung,

$$(10) \ldots \quad r_1^2\lambda^2 + \{[01]^2 - r_0^2 - r_1^2\}\lambda + r_0^2 = 0,$$

deren Wurzeln λ_0 und λ_1 den beiden Kreisen entsprechen. Aus (6) und (7) gehen nämlich die Gleichung des einen Kreises und

Digitized by Google

die Gleichung seines Mittelpunktes hervor, wenn man für λ die eine Wurzel der quadratischen Gleichung (10) setzt. Die andere Wurzel entspricht ebenso dem anderen Kreise. Die Mittelpunkte dieser Kreise heissen die Grenzpunkte des Systemes der Kreise (4).

Die Grenzpunkte sind reell oder imaginär, je nachdem die Wurzeln der quadratischen Gleichung (10) reell oder imaginär sind. Die Realität der Wurzeln hängt ab von dem Ausdrucke:

$$\{[01]^2 - r_0^2 - r_1^2\}^2 - 4r_0^2r_1^2.$$

Ist er positiv, so sind die Wurzeln reell, im anderen Falle sind die Wurzeln imaginär. Der angegebene Ausdruck lässt sich in Factoren zerlegen:

$$-\{[01]+r_0+r_1\}\{-[01]+r_0+r_1\}\{[01]-r_0+r_1\}\{[01]+r_0-r_1\}$$

und man bemerkt in dieser Zerlegung leicht, dass er positiv ist unter der Bedingung:

$$[01] > r_0 + r_1 \text{ oder } [01] < r_1 - r_0 \text{ wenn } r_1 > r_0,$$

unter welcher die gegebenen Kreise sich in imaginären Punkten schneiden. Wir können deshalb sagen:

Ein System von Kreisen, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, hat zwei imaginäre Grenzpunkte, wenn die gegebenen Punkte reell sind; das System von Kreisen hat reelle Grenzpunkte, wenn die Kreise sich in imaginären Punkten schneiden.

Da die Gleichung (8) bei einem gegebenen Radius r in λ quadratisch ist, so sieht man in dem Systeme immer zwei Kreise auftreten mit einem gegebenen Radius.

Das System von Kreisen zu construiren, welche durch die Schnittpunkte zweier gegebenen Kreise geht, hat keine Schwierigkeit, wenn die gegebenen Kreise sich in reellen Punkten schneiden. Sind die Schnittpunkte der gegebenen Kreise imaginär, so müssen wir uns nach einer die Construction vermittelnden charakteristischen Eigenschaft des Systemes umsehen.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass die von einem beliebigen Punkte p der gemeinschaftlichen Secante an die gegebenen beiden Kreise gezogenen Tangenten gleiche Länge haben. Da aber je zwei Kreise des Systemes dieselbe gemeinschaftliche

Digitized by Google

Secante haben, so werden auch die von dem Punkte p an irgend zwei Kreise des Systemes gezogenen Tangenten von gleicher Länge sein. Mit anderen Worten:

Wenn man von einem beliebigen Punkte der gemeinschaftlichen Secante eines Systemes von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, Tangenten an die Kreise zieht, so sind alle von gleicher Länge.

Rein analytisch beweisen wir den Satz wie folgt. Wir verstehen unter x und y die Coordinaten eines Punktes p auf der gemeinschaftlichen Secante der Kreise, welche deshalb der Gleichung $k_0 - k_1 = 0$ genügen. Bringen wir nun die Gleichung des Kreises (4) durch Division mit $1 - \lambda$ auf die Normalform, so stellt der Ausdruck $\frac{k_0 - \lambda k_1}{1 - \lambda}$ das Quadrat der Länge der vom Punkte p an den Kreis gezogenen Tangente dar. Dieser Ausdruck wird aber nach der vorhergehenden Gleichung gleich $\frac{k_0 - \lambda k_0}{1 - \lambda} = k_0$.

Der geometrische Ort der Berührungspunkte ist demnach ein Kreis mit dem Mittelpunkte p, welcher jeden Kreis des Systemes senkrecht schneidet. Dieser, das System senkrecht schneidende, Kreis schneidet auch die beiden Kreise des Systemes senkrecht, deren Radien gleich 0 sind. Das heisst der Kreis geht durch die Grenzpunkte des Systemes. Lassen wir nun den Mittelpunkt p des senkrecht schneidenden Kreises auf der gemeinschaftlichen Secante variiren, so erhalten wir ein zweites System von Kreisen, welche das gegebene System senkrecht schneidet.

Da alle Kreise des zweiten Systemes durch die Grenzpunkte gehen, so ist die Verbindungslinie der Grenzpunkte des ersten Systemes die gemeinschaftliche Secante des zweiten Systemes und das zweite System von gleicher Art als das erste, an welchem sich dieselben Untersuchungen anstellen lassen. Diese Untersuchungen führen auf den Satz:

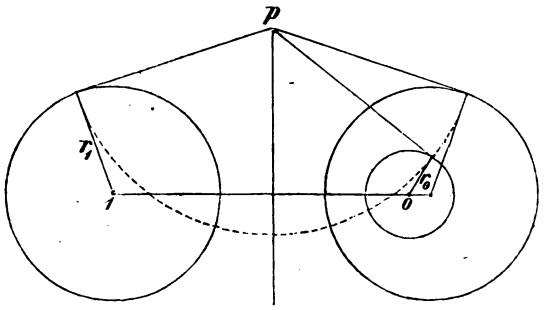
Wenn ein System von Kreisen sich in denselben beiden Punkten schneidet, so giebt es ein zweites System von Kreisen, welche das erste System senk-

Digitized by Google

recht schneiden und welche sich unter einander in denselben beiden Punkten schneiden. Die Grenzpunkte des einen Systemes sind die Schnittpunkte des anderen. Sind die Grenzpunkte des einen Systemes reell, so sind die Grenzpunkte des anderen imaginär.

Die folgende Figur giebt ein Bild von Kreisen, die sich in denselben imaginären Punkten schneiden. Die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Secante, auf welcher der Mittelpunkt p des das System senkrecht schneidenden Kreises liegt. Von den das System senkrecht schneidenden Kreisen ist nur der punktirte Kreis mit dem Mittelpunkte p verzeichnet.

Fig. 12.



Wenn es sich darum handelte, das System der Kreise (4), welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, einfacher zu behandeln, so würde es Vortheil bringen, wenn man an Stelle der gegebenen beiden Kreise die beiden Kreise des Systemes nimmt, deren Radien gleich 0 sind und welche das System ebenfalls bestimmen. Nimmt man diese Kreise für die gegebenen und sind $0'$ und $1'$ ihre Mittelpunkte, so geht die Gleichung (8) über in:

$$r^2 = \frac{[0'1']^2 \lambda}{(1-\lambda)^2},$$

welche Gleichung ungeändert bleibt, wenn man für λ setzt $\frac{1}{\lambda}$ wodurch eben bewiesen wird, dass die Kreise des Systemes von gleichem Radius von der gemeinschaftlichen Secante auf der einen und der anderen Seite derselben gleich weit abstehen. Wir

Digitized by Google

verzichten jedoch auf den angedeuteten Vortheil, obwohl er sich in den folgenden Untersuchungen herausstellen würde.

Um weitere Eigenschaften des betrachteten Systemes von Kreisen (4) zu ermitteln, schreiben wir nach Vorschrift von (9) der vorhergehenden Vorlesung die Gleichungen der Polaren eines durch seine Coordinaten $x_1\ y_1$ gegebenen Punktes hin, für die gegebenen beiden Kreise (3) und für den Kreis (4), dessen Mittelpunkt $a,\ b$ und dessen Radius r in (5) analytisch ausgedrückt sind:

$$(11)\ \ldots\quad \begin{aligned} P_0 &\equiv (x-a_0)(x_1-a_0)+(y-b_0)(y_1-b_0)-r_0^2=0\\ P_1 &\equiv (x-a_1)(x_1-a_1)+(y-b_1)(y_1-b_1)-r_1^2=0\\ P &\equiv (x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2=0. \end{aligned}$$

Von diesen drei Gleichungen wird die dritte mit $1-\lambda$ multiplicirt erhalten, wenn man von der ersten die mit λ multiplicirte zweite Gleichung abzieht. Es beweiset dieses, dass die Polare des Kreises (4) durch den Schnittpunkt der Polaren der beiden Kreise (3) geht. Da aber der Kreis (4) das ganze System von Kreisen repräsentirt, so haben wir den Satz:

Die Polaren eines beliebig gegebenen Punktes in einem System von Kreisen, welche sich in zwei festen Punkten schneiden, gehen durch einen und denselben Punkt.

Der letztere Punkt ist harmonischer Pol zum gegebenen Punkte in jedem Kreise des Systemes. Wir können deshalb auch sagen:

Jeder gegebene Punkt hat einen ganz bestimmten harmonischen Pol in einem System von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden.

Mit dem Beweise des erst genannten Satzes wird man wenig zufrieden sein, weil es den drei Grössen P nicht unmittelbar anzusehen ist, dass zwischen ihnen die identische Relation $P_0-\lambda P_1\equiv(1-\lambda)P$ besteht, auf Grund welcher der Satz hervorging, sondern dass man erst durch eine Rechnung, wie sie in dem Laufe der Vorlesungen nicht verlangt wurde, jene Relation verificiren muss. Wir werden deshalb einen eleganteren Beweis folgen lassen, der hervorgehen wird aus einer dazu ge-

Digitized by Google

eigneteren Darstellung der Gleichung der Polare, von der wir auch in dem Folgenden vielfältigen Gebrauch machen werden.

Wenn wir mit k und P die Ausdrücke bezeichnen:

$$(12) \ldots \quad \begin{aligned} k &\equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 \\ P &\equiv (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) - r^2, \end{aligned}$$

so ist nach dem Vorhergehenden $P = 0$ die Gleichung der Polare des Punktes $x_1\, y_1$ in dem Kreise $k = 0$. Um nun dem Ausdrucke P eine andere Gestalt zu geben, bemerken wir, dass die Ausdrücke:

$$(x-a)^2 - 2(x-a)(x_1-a) + (x_1-a)^2 - (x-x_1)^2$$
$$(y-b)^2 - 2(y-b)(y_1-b) + (y_1-b)^2 - (y-y_1)^2$$

identisch verschwinden. Addiren wir sie zu $2P$, so erhalten wir:

$$2P = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2\} + \{(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 - r^2\} - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2$$

einen Ausdruck für $2P$, dessen erstes Glied k ist, dessen zweites Glied aus k erhalten wird, wenn man darin für x und y die Coordinaten des Poles setzt. Bezeichnen wir demnach den letzteren Ausdruck mit $[k]$, so haben wir:

$$(13) \ldots \quad 2P = k + [k] - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2$$

und darauf hin den Satz:

Wenn $k = 0$ die Gleichung eines Kreises in der Normalform ist und x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes, so ist:

$$(14) \ldots \quad k + [k] - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 = 0$$

die Gleichung der Polare des gegebenen Punktes.

Bilden wir nun nach dieser Regel die Gleichungen der Polare des gegebenen Punktes für die Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$ und $k_0 - \lambda k_1 = 0$ und bemerken, dass die letzte Gleichung durch Division mit $1 - \lambda$ auf die Normalform zurückgeführt wird, so finden wir:

$$(15) \quad \begin{aligned} 2P_0 &\equiv k_0 + [k_0] - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 = 0 \\ 2P_1 &\equiv k_1 + [k_1] - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 = 0 \\ 2P &\equiv \frac{k_0 - \lambda k_1}{1-\lambda} + \frac{[k_0] - \lambda [k_1]}{1-\lambda} - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die oben genannte Relation $P_0 - \lambda P_1 \equiv (1 - \lambda) P$, aus welcher der zu beweisende Satz hervorging, liegt hier zu Tage. Denselben Satz kann man übrigens auch aus der dritten Gleichung (15) allein ablesen, wenn man bemerkt, dass diese Gleichung linear in λ ist.

Um die bewiesene Relation auf eine andere Art zu deuten, erinnern wir daran, dass die erste Gleichung (15) die Bedingung eines durch die Coordinaten x, y und x_1, y_1 gegebenen Polenpaares des Kreises $k_0 = 0$ ausdrückt. Die zweite und die dritte Gleichung sind die Bedingungen desselben Polenpaares für den Kreis $k_1 = 0$ und den Kreis $k_0 - \lambda k_1 = 0$. Da nun die dritte Gleichung (15) aus den beiden ersten folgt, so beweiset das den Satz:

Wenn ein Punktepaar ein Polenpaar ist für einen Kreis und zugleich für noch einen Kreis, so ist das Punktepaar Polenpaar für jeden Kreis, der durch die Schnittpunkte der beiden Kreise geht.

Nach diesem Satze hat es keine Schwierigkeit, Polenpaare für das ganze System von Kreisen zu construiren, welche sich in zwei Punkten schneiden. Ist nämlich ein Pol beliebig gegeben, und man construirt die Polaren des gegebenen Poles in zwei Kreisen des Systemes, so ist der Schnittpunkt der Polaren der dem gegebenen zugehörige Pol für das ganze System von Kreisen.

Wollen wir ein Polenpaar des Systemes auf einer gegebenen geraden Linie construiren, so werden wir die gerade Linie durch zwei Kreise des Systemes schneiden lassen und dasjenige Punktepaar fixiren, welches harmonisch ist mit dem einen Schnittpunktepaar wie mit dem anderen. Da das fixirte Punktepaar Polenpaar ist für beide Kreise, so ist es nach dem letzten Satze Polenpaar für jeden Kreis des Systemes, das heisst, jeder Kreis des Systemes wird von der gegebenen geraden Linie in einem Punktepaare geschnitten, welches harmonisch ist mit dem fixirten Punktepaare. Gehen wir auf die Definition der Involution zurück, so erkennen wir in der gegebenen Auseinandersetzung den Satz:

Drei Kreise, von welchen jeder durch zwei beliebig gegebene Punkte geht, schneiden jede gerade Linie in Punktepaaren der Involution.

Digitized by Google

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit noch einmal auf die beiden ersten Gleichungen (15) den Bedingungen eines Polenpaares xy und $x_1 y_1$ der Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ und, nach dem gegebenen Satze, sämmtlicher Kreise des Systemes. Ziehen wir die eine Gleichung von der anderen ab, so erhalten wir:

$$(16) \ldots \ldots \quad k_0 - k_1 = -\{[k_0] - [k_1]\}$$

eine Gleichung, welche sich ebenfalls geometrisch deuten lässt.

Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass die Gleichung (9) der gemeinschaftlichen Secante des Systemes Kreise nicht die Normalform der Gleichung einer geraden Linie hat, dass wir sie aber durch Multiplication mit einem bestimmten Factor auf die Normalform zurückführen können, in welcher der linke Theil der Gleichung die negative Entfernung eines beliebigen Punktes von der gemeinschaftlichen Secante ausdrückt. Multipliciren wir nun die Gleichung (16) mit diesem Factor, so stellt der linke Theil der Gleichung die negative Entfernung des Poles xy von der gemeinschaftlichen Secante dar, der rechte Theil derselben Gleichung die positive Entfernung des Poles $x_1 y_1$ von derselben Secante und die Gleichung drückt analytisch den Satz aus:

Harmonische Pole eines Systemes von Kreisen, welche sich in zwei beliebig gegebenen Punkten schneiden, stehen von der gemeinschaftlichen Secante der Kreise auf beiden Seiten derselben gleich weit ab.

Wir drücken diesen Satz nur anders aus, wenn wir sagen:

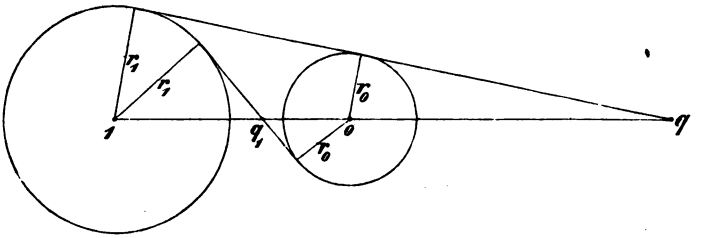
Die Verbindungslinie eines jeden Polenpaares in einem System von Kreisen, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, wird von der gemeinschaftlichen Secante der Kreise halbirt.

An zwei mit ihren Mittelpunkten 0 und 1 und ihren Radien r_0 und r_1 gegebene Kreise (3) lassen sich vier gemeinschaftliche Tangenten legen. Diese Tangenten paaren sich, indem das eine, wie das andere Paar sich auf der Centralaxe, der Verbindungslinie der Mittelpunkte 0 und 1, schneiden.

Digitized by Google

Liegt der Schnittpunkt q auf der Verlängerung der Centralaxe, so heissen die Tangenten äussere Tangenten, wenn der Schnittpunkt q_1 auf der Centralaxe selbst liegt, innere Tan-

Fig. 13.



genten der Kreise. Die bezeichneten Punkte q auf der Verlängerung der Centralaxe und q_1 auf der Centralaxe selber heissen der äussere und der innere Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke in der Figur sieht man, dass das Verhältniss der Abstände der Aehnlichkeitspunkte von den Mittelpunkten 0 und 1 der Kreise ist $r_0 : r_1$ oder $r_0 : -r_1$. Da nun die Gleichung (4) mit dem willkürlichen Factor λ jeden Punkt der Centralaxe, also auch die Aehnlichkeitspunkte darstellt, so haben wir für den äusseren Aehnlichkeitspunkt $\lambda = \frac{r_0}{r_1}$ und für den inneren Aehnlichkeitspunkt $\lambda = -\frac{r_0}{r_1}$ und daher ihre Gleichungen:

$$(17) \quad \ldots\ldots \quad \frac{A_0}{r_0} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \qquad \frac{A_0}{r_0} + \frac{A_1}{r_1} = 0.$$

Wir werden nun Aufgaben stellen und lösen, welche den Zweck haben, die beschriebenen Figuren analytisch wiederzugeben und sie eingehender zu verfolgen.

Es sind die Gleichungen zweier Kreise gegeben in der Normalform $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, gesucht wird die Gleichung der Polare des Mittelpunktes des letzteren Kreises in dem ersten.

Nach (14) ist die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes $x_1 y_1$ in dem Kreise $k_0 = 0$:

$$k_0 + \underset{x_1 y_1}{[k_0]} - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 = 0,$$

Digitized by Google

daraus ergiebt sich nun zunächst, wenn man für $x_1\ y_1$ die Coordinaten $a_1\ b_1$ des Mittelpunktes des zweiten Kreises setzt:

$$k_0 + \underset{a_1 b_1}{[k_0]} - k_1 - r_1^2 = 0$$

und schliesslich die Gleichung der gesuchten Polare:

(18) . . . . . $k_0 - k_1 + \underset{a_0 b_0}{[k_0]} + \underset{a_0 b_0}{[k_1]} = 0.$

Es sind die Gleichungen zweier Kreise $k_0 = 0$, $k_1 = 0$ und die Gleichungen ihrer Mittelpunkte $A_0 = 0$, $A_1 = 0$ gegeben in der Normalform, gesucht wird die Polare eines beliebigen, durch die Gleichung $A_0 - \lambda A_1 = 0$ gegebenen Punktes der Centralaxe der Kreise in dem ersten Kreise.

Der auf der Centralaxe gegebene Punkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Gleichung in der Normalform ist:

$$\frac{k_0 - \lambda k_1}{1 - \lambda} = 0.$$

Setzen wir daher für k_1 in der Gleichung (18) den linken Theil der angegebenen Kreisgleichung, so erhalten wir die Gleichung der gesuchten Polare. Diese Gleichung lässt sich ohne Schwierigkeit auf die Form bringen:

(19) . . . $k_1 - k_0 - [01]^2 + r_0^2 + r_1^2 - \frac{2}{\lambda} r_0^2 = 0,$

wenn wir unter [01] die Entfernung der Mittelpunkte 0 und 1 der gegebenen Kreise verstehen, deren Quadrat ist $[01]^2 = (a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2$.

Es sind die Gleichungen $k_0 = 0$, $k_1 = 0$ zweier Kreise in der Normalform gegeben, die Gleichung der Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes der Kreise in dem Kreise $k_0 = 0$ zu bestimmen.

Die gesuchte Gleichung wird aus (19) erhalten, wenn wir setzen $\lambda = \frac{r_0}{r_1}$, wodurch jene Gleichung übergeht in:

$$k_1 - k_0 - [01]^2 + (r_1 - r_0)^2 = 0.$$

Führen wir der Bequemlichkeit wegen die Bezeichnung ein:

(20) . . . . . $q = [01]^2 - (r_1 - r_0)^2,$

Digitized by Google

von der wir auch im Folgenden Gebrauch machen werden, so haben wir die Gleichung der Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes der gegebenen Kreise im Kreise $k_0 = 0$:

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad k_1 - k_0 - q = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung $-r_0$ für r_0 setzen, wodurch sich allein q ändert, erhalten wir die Gleichung des inneren Aehnlichkeitspunktes. Es stellen sich also die Gleichungen der Polaren der Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise in dem Kreise $k_0 = 0$ vollständig hingeschrieben so dar:

$$(22) \quad \begin{aligned} &k_1 - k_0 - \{[01] - r_0 + r_1\}\{\ [01]\ + r_0 - r_1\} = 0 \\ &k_1 - k_0 + \{[01] + r_0 + r_1\}\{-[01] + r_0 + r_1\} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung des äusseren Tangentenpaares zu bestimmen, welches den durch ihre Gleichungen $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ in der Normalform gegebenen Kreisen gemeinschaftlich ist.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung die Gleichung (10) des Tangentenpaares gegeben, welches von einem durch die Coordinaten $x_1\, y_1$ gegebenen Punkte an den Kreis $k = 0$ gezogen werden kann. Nehmen wir für den Kreis $k = 0$ dort den Kreis $k_0 = 0$ und adoptiren die bereits eingeführten Bezeichnungen, so ist ersichtlich, dass die Gleichung des von dem Punkte $x_1\, y_1$ an den Kreis $k_0 = 0$ gezogenen Tangentenpaares sich kürzer so darstellen lässt:

$$\{k_0 + [k_0] - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2\}^2 - 4 k_0\, [k_0] = 0.$$

Es wird dieses Tangentenpaar das gesuchte äussere Tangentenpaar der gegebenen Kreise, wenn x_1 und y_1 die Coordinaten des äusseren Aehnlichkeitspunktes werden, das heisst, wenn man substituirt:

$$x_1 = \frac{\frac{a_0}{r_0} - \frac{a_1}{r_1}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}} \qquad y_1 = \frac{\frac{b_0}{r_0} - \frac{b_1}{r_1}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}.$$

Die Reduction der angegebenen Gleichung des Tangentenpaares nach der Substitution auf ihre einfachste Form verlangt einige Rechnung. Um sie zu umgehen, bemerken wir, dass,

Digitized by Google

wenn wir den ersten Theil der obigen Gleichung gleich 0 setzen:

$$k_0 + [k_0] - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 = 0,$$

wir die Gleichung der Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes der gegebenen Kreise im Kreise $k_0 = 0$ haben; eine Gleichung, welcher wir in (21) die Gestalt gegeben haben:

$$k_1 - k_0 - q = 0.$$

Die linken Theile der beiden letzten Gleichungen sind nicht identisch, können aber durch einen Factor C identisch gemacht werden, so dass man hat:

$$k_0 + [k_0] - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 \equiv C\{k_1 - k_0 - q\}.$$

Um den Factor C in dieser identischen Gleichung zu bestimmen, bemerken wir, dass die Substitutionen der angegebenen Coordinaten des äusseren Aehnlichkeitspunktes in k_0 und k_1 diese Ausdrücke übergehen machen in:

$$[k_0] = \frac{r_0^2}{(r_1 - r_0)^2} \cdot q \qquad [k_1] = \frac{r_1^2}{(r_1 - r_0)^2} \cdot q.$$

Setzen wir in der identischen Gleichung für x und y respective x_1 und y_1, so geht sie über in:

$$2[k_0] = C\{k_1 - k_0 - q\}$$

und wenn wir die angegebenen Werthe von $[k_0]$ und $[k_1]$ einsetzen, erhalten wir den gesuchten Werth der Constante:

$$C = \frac{r_0}{r_1 - r_0}.$$

Substituiren wir die behandelten Ausdrücke in die Gleichung des Tangentenpaares, von der wir ausgingen, so erhalten wir:

(23) . . . . $\{k_1 - k_0 - q\}^2 - 4k_0 q = 0,$

oder entwickelt in symmetrischer Form die Gleichung des äusseren Tangentenpaares der gegebenen Kreise:

(24) . . . $k_0^2 + k_1^2 + q^2 - 2k_0 k_1 - 2k_0 q - 2k_1 q = 0.$

Dass dieses Tangentenpaar durch die Schnittpunkte des Kreises $k_0 = 0$ und der Polare (21) des äusseren Aehnlichkeitspunktes in jenem Kreise geht, ist ersichtlich aus der Form der Gleichung (23) des Tangentenpaares, welche erfüllt wird, sobald die genannten beiden Gleichungen erfüllt werden.

Digitized by Google

Die geometrische Bedeutung der Constante q in der Gleichung (24) ergiebt sich aus der sie definirenden Gleichung (20), welche aussagt, dass q das Quadrat der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Hypotenuse die Entfernung der Mittelpunkte der gegebenen Kreise von einander und dessen andere Kathete die Differenz der Radien dieser Kreise ist. Daraus wird ersichtlich, dass q das Quadrat der Entfernung der beiden Berührungspunkte einer äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise von einander ist.

Dasselbe lässt sich unmittelbar aus der Gleichung (24) beweisen, wenn man sie in irrationale Factoren zerlegt, wie folgt:

$$(25)\ \ldots \quad \begin{matrix} \{\sqrt{k_0} + \sqrt{k_1} + \sqrt{q}\}\ \{-\sqrt{k_0} + \sqrt{k_1} + \sqrt{q}\} \\ \{\sqrt{k_0} - \sqrt{k_1} + \sqrt{q}\}\ \{\ \ \sqrt{k_0} + \sqrt{k_1} - \sqrt{q}\} \end{matrix} = 0.$$

Ein Punkt kann auf dem durch diese Gleichung dargestellten Tangentenpaare nicht liegen, wenn seine Coordinaten x, y nicht einen der vier Factoren verschwinden machen. Da nun $\sqrt{k_0}$ und $\sqrt{k_1}$ die Längen der von dem Punkte an die Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ gezogenen Tangenten ausdrücken, so muss die Summe oder die Differenz der Längen der Tangenten von einem Punkte des Tangentenpaares eine constante Grösse $\pm\sqrt{q}$ sein. Das heisst eben, die Entfernung der Berührungspunkte einer äusseren Tangente von einander ist gleich $\sqrt{q}$.

Wir bemerken noch, dass die Gleichung (24) oder (25) in die Gleichung des inneren Tangentenpaares der gegebenen Kreise übergeht, wenn man $-r_0$ für r_0 setzt, wodurch sich in diesen Gleichungen nur q ändert.

Man hat gesehen, dass die Gleichungen der Kreise, deren Mittelpunkte beliebig auf der Centralaxe der gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ liegen, wenn sie sich in denselben Punkten mit den gegebenen Kreisen schneiden, von der Form sind: $mk_0 + nk_1 = 0$. Man verändert in einer Kreisgleichung nur den Radius des Kreises, wenn man zu derselben eine Constante additiv hinzufügt. Es können deshalb die Gleichungen aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der Centralaxe der gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ liegen, auf die Form zurückgeführt werden:

$$(26)\ \ldots\ldots\ mk_0 + nk_1 + p = 0$$

Digitized by Google

und alle Gleichungen von dieser Form stellen Kreise dar, deren Mittelpunkte auf der Centralaxe liegen. Unter der Bedingung $m + n = 0$ stellt die Gleichung (26) jede gerade Linie dar, welche senkrecht gegen die Centralaxe ist.

Von der angegebenen Form ist die Kreisgleichung:

$$(27) \ldots\ldots\ldots \quad k_0 + k_1 - q = 0.$$

Sie stellt, wenn wir q variiren lassen, alle Kreise dar, deren Mittelpunkte die Centralaxe der gegebenen Kreise halbiren.

Auf eine Kreisgleichung von der angegebenen Form führt auch die folgende Aufgabe:

Die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch die vier Berührungspunkte der äusseren Tangenten zweier durch ihre Gleichungen in der Normalform $k_0 = 0$, $k_1 = 0$ gegebenen Kreise hindurchgeht.

Schreiben wir die Gleichung des äusseren Tangentenpaares (24) in der Form hin:

$$\{k_0 + k_1 - q\}^2 - 4 k_0 k_1 = 0,$$

so können wir daraus schliessen, dass:

$$(28) \ldots\ldots\ldots \quad k_0 + k_1 - q = 0$$

die Gleichung des gesuchten Kreises sein muss. Denn wenn dieser Gleichung eines Kreises genügt wird und zugleich einer der gegebenen Kreisgleichungen $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, so wird auch der angegebenen Tangentengleichung genügt. Der Vergleich der Gleichungen (28) und (27) führt zu dem Satze:

Der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Berührungspunkte der äussern gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise geht, halbirt die Centralaxe der Kreise. Wenn einer der beiden Kreise den Radius 0 hat, so ist dieses ein bekannterer Satz der Geometrie.

Wir specialisiren unsere Kreisgleichung (28), wenn wir für die Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$, deren Mittelpunkte 0 und 1 sind, die beiden Grenzkreise des Systemes (4) nehmen, $k_0' = 0$

Digitized by Google

und $k_1' = 0$, deren Radien gleich 0 und deren Mittelpunkte $0'$ und $1'$ seien. Die specialisirte Gleichung:

$$(29) \ldots\ldots\ldots k_0' + k_1' - [0'1']^2 = 0.$$

Sie stellt einen Kreis dar, dessen Mittelpunkt auf der Centralaxe der gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ liegt und der durch die Grenzpunkte des Systemes (4) geht. Der specialisirten Gleichung (29) werden wir uns zur zweiten Auflösung der folgenden Aufgabe bedienen.

Es sind die Gleichungen $k_0 = 0$, $k_1 = 0$ zweier Kreise in der Normalform gegeben, es soll die Gleichung des Kreises bestimmt werden, dessen Mittelpunkt auf der Centralaxe der gegebenen Kreise liegt und zugleich durch die Grenzpunkte des Systemes von Kreisen geht, welche sich in den Schnittpunkten der gegebenen Kreise schneiden.

Da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Centralaxe der gegebenen Kreise liegt, so wird die Form der Kreisgleichung die in (26) angegebene sein müssen:

$$(30) \ldots\ldots\ldots mk_0 + nk_1 + p = 0.$$

Es handelt sich also darum, die Coefficienten $m\,n\,p$ in dieser Gleichung zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass

$$(31) \ldots\ldots x = \frac{a_0 - \lambda a_1}{1 - \lambda} \quad y = \frac{b_0 - \lambda b_1}{1 - \lambda}$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Centralaxe der gegebenen Kreise sind. Hat λ einen Werth, der der quadratischen Gleichung (10) genügt, deren Wurzeln die Grenzpunkte bestimmen, so stellen jene Ausdrücke (31) die Coordinaten eines Grenzpunktes dar.

Setzt man nun jene Ausdrücke (31) für x und y in die Gleichung (30), so erhält man eine quadratische Gleichung in λ, welche die Schnittpunkte des Kreises (30) und der Centralaxe bestimmt. Da diese Schnittpunkte aber die Grenzpunkte sein sollen, so muss die genannte quadratische Gleichung dieselbe sein, als die quadratische Gleichung (10), welche die Grenzpunkte

Digitized by Google

bestimmt, das heisst die Coefficienten der einen nach Potenzen von λ entwickelten quadratischen Gleichung müssen proportional sein den entsprechenden Coefficienten in der anderen entwickelten Gleichung.

Aus dieser Proportionalität der Coefficienten gehen nun zwei in Rücksicht auf m, n, p lineare und homogene Gleichungen hervor, aus welchen sich die Verhältnisse der Unbekannten m, n, p bestimmen lassen. Bestimmt man dieselben und setzt ihre Werthe in (30) ein, so erhält man die Gleichung des gesuchten Kreises:

$$(32)\quad k_0\{[01]^2 - r_0^2 + r_1^2\} + k_1\{[01]^2 + r_0^2 - r_1^2\} + p = 0, \text{ wenn:}$$
$$p = \{[01] + r_0 + r_1\}\{-[01] + r_0 + r_1\}\{[01] - r_0 + r_1\}\{[01] + r_0 - r_1\}.$$

Diese Gleichung geht in die Gleichung (29) über, wenn wir für die Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ die Grenzkreise $k_0' = 0$ und $k_1' = 0$ mit verschwindenden Radien und den Mittelpunkten $0'$ und $1'$ nehmen, was als eine Controlle der Rechnung dienen kann.

Die Herleitung der Gleichung (32) auf dem angegebenen Wege erfordert nicht unbeträchtliche Rechnungen. Wir empfehlen deshalb zur Lösung der vorliegenden Aufgabe den folgenden Weg, der die Ausdrucksweise der symmetrischen Functionen der Wurzeln λ_0 und λ_1 der quadratischen Gleichung (10) verlangt.

Wir gehen von der Gleichung (29) des gesuchten Kreises aus:

$$(33)\quad \ldots\ldots\ k_0' + k_1' - [0'1']^2 = 0.$$

Diese Gleichung enthält freilich nicht die Data der Aufgabe. Es wird deshalb unsere Aufgabe sein, diese Data in die Gleichung einzuführen. Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass:

$$k_0' = \frac{k_0 - \lambda_0 k_1}{1 - \lambda_0} \qquad k_1' = \frac{k_0 - \lambda_1 k_1}{1 - \lambda_1}$$

und dass die Summe dieser Ausdrücke von k_0' und k_1' eine symmetrische Function der Wurzeln der quadratischen Gleichung (10), welche sich durch die Coefficienten in jener Gleichung wie folgt darstellen lässt:

$$(34)\quad k_0' + k_1' = \frac{1}{[01]^2}\Big\{k_0\{[01]^2 - r_0^2 + r_1^2\} + k_1\{[01]^2 + r_0^2 - r_1^2\}\Big\}.$$

Digitized by Google

Ebenso ist der Ausdruck $[0'1']^2$ zusammengesetzt aus den Coordinaten a_0', b_0' und a_1', b_1' der Grenzpunkte wie folgt:

$$[0'1']^2 = (a_0' - a_1')^2 + (b_0' - b_1')^2$$

eine symmetrische Function der Wurzeln λ_0 und λ_1, weil:

$$a_0' = \frac{a_0 - \lambda_0 a_1}{1 - \lambda_0} \qquad b_0' = \frac{b_0 - \lambda_0 b_1}{1 - \lambda_0}$$

$$a_1' = \frac{a_0 - \lambda_1 a_1}{1 - \lambda_1} \qquad b_1' = \frac{b_0 - \lambda_1 b_1}{1 - \lambda_1}.$$

Drückt man auch diese symmetrische Function $[0'1']^2$ durch die Coefficienten in der Gleichung (10) aus, so findet man:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [0'1']^2 = -\frac{p}{[01]^2}$$

wo p den in (32) gegebenen Werth hat.

Setzen wir endlich in (33) die in (34) und (35) gefundenen Ausdrücke ein, so erhalten wir die gesuchte Gleichung (32).

Wir haben diesen Weg der Auflösung der Aufgabe mit grösserer Ausführlichkeit verfolgt, weil er durch die Gleichung (35) eine Einsicht giebt in die Bedeutung der Constante p in der gesuchten Gleichung (32). Jene Gleichung (35) sagt nämlich aus, dass die Constante p in der Gleichung (35) negativ genommen gleich ist dem Quadrat des Productes der Entfernung der Mittelpunkte der gegebenen Kreise von einander und der Entfernung der Grenzpunkte von einander. Die anderen Coefficienten von k_0 und k_1 in der Gleichung (32) lassen sich leichter nach dem Pythagoräischen Lehrsatze geometrisch darstellen.

Wenn man mit Q und B die Ausdrücke bezeichnet:

$$(36) \quad \begin{aligned} Q &\equiv k_0\{[01]^2 - r_0^2 + r_1^2\} + k_1\{[01]^2 + r_0^2 - r_1^2\} + p \\ B &\equiv (b_0 - b_1)\,x - (a_0 - a_1)\,y + (a_0 b_1 - a_1 b_0), \end{aligned}$$

welche gleich 0 gesetzt den Kreis (32) und die Centralaxe der gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ ausdrücken, so lassen sich sämmtliche Kreise, welche durch die Grenzpunkte gehen und darum das betreffende System Kreise senkrecht schneiden, durch die angegebenen Symbole so darstellen:

Es ist $Q - \mu B = 0$ mit dem willkürlichen Factor μ der analytische Ausdruck aller Kreise, welche das System Kreise $k_0 - \lambda k_1 = 0$ senkrecht schneiden.

Digitized by Google

Wenn man von dieser Vorlesung zurückblickt auf die vorhergehende, in welcher die Kreisgleichung in doppelter Weise behandelt wurde, in Punktcoordinaten und in Liniencoordinaten, so möchte man nach der Analogie mit den früheren Vorlesungen in den folgenden eine gleiche Behandlung der Gleichung $k_0 - \lambda k_1 = 0$ erwarten unter der Voraussetzung, dass $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ die Gleichungen zweier in Liniencoordinaten gegebenen Kreise seien. Von einer solchen Behandlung müssen wir jedoch hier Abstand nehmen, weil jene Gleichung nicht mehr der analytische Ausdruck eines Kreises ist, sondern eines Kegelschnittes, der die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise berührt.

Wir schliessen die Vorlesung mit der Hinweisung auf eine Quelle von empfehlenswerthen Aufgaben, von welchen nur einige gelöset vorliegen.

Man weiss, dass die Gleichung eines jeden Kreises mit einem Mittelpunkte auf der Centralaxe der gegebenen Kreise $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ und dass die Gleichung jeder geraden Linie, welche auf der Centralaxe der gegebenen Kreise senkrecht steht, von der Form (26) $mk_0 + mk_1 + p = 0$ sind. Definirt man nun einen Kreis mit dem Mittelpunkte auf der Centralaxe oder eine auf ihr senkrecht stehende gerade Linie durch Eigenschaften derselben rücksichtlich der gegebenen Kreise, so erhebt sich jedes Mal die Frage nach den Werthen der Coefficienten $m\,n\,p$ in der angegebenen Gleichung, welche dem Kreise oder der geraden Linie entsprechen.

Digitized by Google

Dreizehnte Vorlesung.

Das System von Kreisen, welche von einem Kreise senkrecht geschnitten werden. Das Problem der Berührung eines Kreises an drei gegebenen Kreisen.

Mit Anschluss an die Bezeichnungen (1) und (2) der vorhergehenden Vorlesung gehen wir von den Gleichungen dreier gegebenen Kreise aus:

$$(1) \ldots\ldots \quad k_0 = 0 \quad k_1 = 0 \quad k_2 = 0,$$

deren Mittelpunkte durch die Gleichungen analytisch ausgedrückt werden:

$$(2) \ldots\ldots \quad A_0 = 0 \quad A_1 = 0 \quad A_2 = 0.$$

Wir bilden aus den gegebenen Kreisgleichungen die Gleichung mit den unbestimmten Coefficienten λ, μ:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad k_0 + \lambda k_1 + \mu k_2 = 0$$

und bemerken, dass diese Gleichung den Bedingungen (3) der elften Vorlesung für einen Kreis genügt, weshalb die Gleichung (3) wieder einen Kreis darstellt. Seine Gleichung wird durch Division mit $1 + \lambda + \mu$ auf die Normalform zurückgeführt.

Die Coordinaten des Mittelpunktes a, b dieses Kreises (3) werden durch Entwickelung der Kreisgleichung nach Vorschrift von (4) der elften Vorlesung gefunden:

$$a = \frac{a_0 + \lambda a_1 + \mu a_2}{1 + \lambda + \mu} \qquad b = \frac{b_0 + \lambda b_1 + \mu b_2}{1 + \lambda + \mu},$$

woraus sich die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises (3) ergiebt:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad A_0 + \lambda A_1 + \mu A_2 = 0.$$

Da diese letzte Gleichung jeden beliebigen Punkt darstellt, so können wir sagen, dass die Gleichung (3) mit den un-

Digitized by Google

bestimmten Factoren λ und μ einen Kreis darstelle mit einem beliebigen Mittelpunkte.

Was seinen Radius anbetrifft, so ist er nach (4) der elften Vorlesung ein ganz bestimmter Ausdruck in λ und μ, also durch seinen Mittelpunkt bestimmt. Es stellt demnach die Gleichung (3) nicht jeden beliebigen Kreis dar. Bemerken wir aber, dass durch Hinzufügung einer beliebigen Constante in der Gleichung eines Kreises sich nur der Radius des Kreises beliebig ändert, so können wir sagen:

Die Gleichung mit den willkürlichen Constanten $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$:

$$(5) \ldots\ldots \quad \varkappa k_0 + \lambda k_1 + \mu k_2 + \nu = 0$$

stellt jeden beliebigen Kreis und jede beliebige gerade Linie dar.

Denn wenn $\varkappa + \lambda + \mu = 0$ wird, so geht der Kreis in eine gerade Linie über und von den vier willkürlichen Constanten $\varkappa \lambda \mu \nu$ des Kreises bleiben nur drei übrig.

Wir heben diesen Satz hervor als eine Quelle weiterer Aufgaben, wie wir sie am Ende der vorhergehenden Vorlesung in Vorschlag gebracht haben; ja, wir behaupten, dass auf dem angegebenen Satze sich eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie der geraden Linie und des Kreises gründen lässt.

Da die Kreise (3) nicht ganz willkürlich sind, so werden wir die charakteristische Eigenschaft des Systemes (3) zu erforschen haben.

Ziehen wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (1) der gegebenen Kreise, welche ebenfalls dem Systeme (3) angehören, von einander ab, so erhalten wir:

$$(6) \ldots \quad k_1 - k_2 = 0 \quad k_2 - k_0 = 0 \quad k_0 - k_1 = 0$$

die Gleichungen der gemeinschaftlichen Secanten je zweier gegebenen Kreise. Dass die Summe der drei Gleichungen (6) identisch verschwindet, beweiset der Satz:

Die gemeinschaftlichen Secanten je zweier Kreise von drei gegebenen Kreisen schneiden sich in demselben Punkte C, genannt das Centrum der gemeinschaftlichen Secanten.

Digitized by Google

Nehmen wir aus dem System (3) irgend zwei Kreise, deren Gleichungen auf die Normalform zurückgeführt sein werden:

$$\frac{k_0 + \lambda k_1 + \mu k_2}{1 + \lambda + \mu} = 0 \qquad \frac{k_0 + \lambda' k_1 + \mu' k_2}{1 + \lambda' + \mu'} = 0,$$

und ziehen die Gleichungen von einander ab, um die Gleichung der gemeinschaftlichen Secante der beiden Kreise zu bilden, so sehen wir, dass die gebildete Gleichung linear zusammengesetzt ist aus den Gleichungen (6), woraus wir schliessen:

Die gemeinschaftlichen Secanten je zweier Kreise des Systemes schneiden sich in dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten der gegebenen Kreise.

Wir wollen nicht unterlassen zu bemerken, dass die gemeinschaftliche Secante zweier Kreise des Systemes nach der Zusammensetzung ihrer Gleichung sich betrachten lässt als ein Kreis des Systemes, dessen Radius unendlich gross ist, weshalb man auch sagen kann, dass die Kreise des Systemes mit unendlich grossem Radius sich in dem Centrum C schneiden. Die Frage nach den Kreisen des Systemes, deren Radien 0 sind, liegt dann nahe. Die Beantwortung dieser Frage wird sich im Folgenden von selbst ergeben. Die weitere Frage nach den Kreisen des Systemes von gleichen Radien soll hiermit nur angeregt sein.

Der hervorgehobene Satz giebt ein Mittel, jeden beliebigen Kreis des Systemes (3) zu construiren. Suchen wir nämlich denjenigen Kreis des Systemes, dessen Mittelpunkt ein gegebener Punkt sein soll, so werden wir von dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten der gegebenen Kreise ein Loth auf die Centralaxe des gesuchten und eines der gegebenen Kreise zu fällen haben. Die Schnittpunkte des Lothes mit dem gegebenen Kreise werden Punkte der Peripherie des gesuchten Kreises sein, denn das Loth ist die gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise.

Wenn wir unter x und y die Coordinaten des Centrums C verstehen, so erfüllen sie sämmtliche Gleichungen (6), weil die durch jene Gleichungen dargestellten geraden Linien sich in dem Punkte C schneiden. In dieser Voraussetzung ist:

$$k_0 = k_1 = k_2$$

was wir geometrisch so deuten:

Digitized by Google

Die von dem Centrum der gemeinschaftlichen Secanten dreier gegebenen Kreise an die Kreise gezogenen Tangenten sind von gleicher Länge.

Man kann demnach durch die Berührungspunkte der von dem Centrum C an die drei gegebenen Kreise gezogenen Tangenten einen Kreis legen, dessen Mittelpunkt C und dessen Radius von der Länge einer jener Tangenten sein wird.

Dieser Kreis schneidet jeden der gegebenen Kreise senkrecht. Sein Mittelpunkt ist durch zwei von den Gleichungen (6) bestimmt, sein Radius ϱ gleich der Länge einer jener Tangenten, durch die Gleichung $\varrho^2 = [k_0]$, in welcher unter $[k_0]$ der Ausdruck k_0 zu verstehen ist, in welchem für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Mittelpunktes gesetzt sind.

Nehmen wir die Gleichung (3) irgend eines Kreises des betrachteten Systemes und führen sie durch Division mit $1 + \lambda + \mu$ auf die Normalform zurück, so wird der linke Theil, wenn man in demselben für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Centrums setzt, den Werth $[k_0]$ annehmen, weil für diese Coordinaten $k_0 = k_1 = k_2 = [k_0]$ ist. Daraus ziehen wir die Schlüsse:

Die von dem Centrum der gemeinschaftlichen Secanten dreier gegebenen Kreise (1) an die Kreise des Systemes (3) gezogenen Tangenten sind von gleicher Länge.

Alle Kreise des Systemes (3) werden von einem und demselben Kreise senkrecht geschnitten, dem Orthogonalkreise des Systemes.

Dass es ausser den Kreisen des Systemes (3) keinen Kreis giebt, der von dem Orthogonalkreise senkrecht geschnitten wird, lässt sich so nachweisen. Wir nehmen an, dass ein Kreis (5) ausserhalb des Systemes von der genannten Eigenschaft sei. Bringen wir dann die Kreisgleichung (5) durch Division mit $\varkappa + \lambda + \mu$ auf die Normalform, so muss der linke Theil der Kreisgleichung den Werth $[k_0]$ annehmen, wenn wir in demselben für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Centrums C setzen. Dieses ist aber, da $[k_0] = [k_1] = [k_2]$, nicht möglich, wenn nicht $\nu = 0$ ist.

Digitized by Google

Hierauf gründet sich nun eine zweite Construction eines beliebigen Kreises des Systemes (3) mit Hülfe des Orthogonalkreises. Zieht man nämlich irgend zwei Radien des letzteren Kreises und construirt irgend einen Kreis, der von den beiden Radien in ihren Endpunkten berührt wird, so ist dieser ein Kreis des Systemes.

Daraus ist wiederum ersichtlich, dass der Orthogonalkreis der geometrische Ort ist für die Mittelpunkte derjenigen Kreise des Systemes, deren Radien gleich 0 sind, und dass seine Peripherie die Grenze bildet für die Mittelpunkte der Kreise des Systemes, die reell oder imaginär sind.

Wenn wir uns nun die Aufgabe stellen:

Die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der die gegebenen Kreise (1) orthogonal schneidet,

so ist diese Aufgabe durch das Vorhergehende als gelöset zu betrachten. Denn zwei von Gleichungen (6) geben die Coordinaten $\alpha\beta$ des Mittelpunktes C des gesuchten Kreises und sein Radius ϱ ist bestimmt durch die Gleichung $\varrho^2 = [k_0]_{\alpha\beta}$. Aus diesen Elementen lässt sich aber die Gleichung des gesuchten Kreises zusammensetzen.

Wir müssen uns begnügen, die Bildung der gesuchten Kreisgleichung anzugeben; die vollständig ausgerechnete Kreisgleichung würde einen zu grossen Umfang haben.

Die eben genannte Gleichung des Orthogonalkreises ist nicht von der Form (5). Wir wollen daher noch einen Weg angeben, auf dem man zur Gleichung des Orthogonalkreises in jener Form gelangt.

Unter den Kreisen des Systemes (3) giebt es einen Kreis, dessen Mittelpunkt das Centrum C, der Mittelpunkt des Orthogonalkreises, ist. Die Gleichung dieses Kreises (3) hat mit den ihm entsprechenden Werthen von λ und μ bereits die Form (5). Addirt man zu dieser Kreisgleichung eine beliebige Constante, so erhält man die Gleichungen aller mit dem Orthogonalkreise concentrischen Kreise. Ein bestimmter Werth der Constante wird dem Orthogonalkreise entsprechen. Diesen Werth wird man festzustellen haben.

Digitized by Google

Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, dass der Radius ϱ des Orthogonalkreises ausgedrückt ist durch die Gleichung:

$$\varrho^2 = [k_0] = [k_1] = [k_2],$$

dass ferner die auf die Normalform zurückgeführte Gleichung des mit dem Orthogonalkreis concentrischen Kreises des Systemes, dessen Radius r sei:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{k_0 + \lambda k_1 + \mu k_2}{1 + \lambda + \mu} = 0.$$

Bemerken wir nun, dass wenn man in dem linken Theile einer in der Normalform gegebenen Kreisgleichung für die variabeln Coordinaten die Coordinaten des Mittelpunktes setzt, derselbe das negative Quadrat des Radius des Kreises ausdrückt, so finden wir für den vorliegenden Kreis (7), dessen Radius r:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad -r^2 = [k_0] = [k_1] = [k_2].$$

Wir haben demnach den Satz:

Zwischen dem Radius ϱ des Orthogonalkreises des Systemes (3) und dem Radius r des mit ihm concentrischen Kreises des Systemes existirt die Relation:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varrho^2 + r^2 = 0.$$

Addiren wir hiernach zur Gleichung (7) des mit dem Orthogonalkreise concentrischen Kreises $2r^2$, so erhalten wir die Gleichung des Orthogonalkreises in der gewünschten Form:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \frac{k_0 + \lambda k_1 + \mu k_2}{1 + \lambda + \mu} + 2r^2 = 0.$$

Die Grössen λ und μ in dieser Gleichung sind so zu bestimmen, dass ihre Werthe in die Gleichung (4) eingesetzt, diese in die Gleichung des Centrums C der gemeinschaftlichen Secanten übergehen machen.

Es hat keinen Zweck, die ausgerechnete Gleichung hinzuschreiben. Man würde sie wegen ihrer grossen Ausdehnung doch nicht übersehen und aus ihr auf ihre Natur weitere Schlüsse ziehen können. Liegt jedoch die Aufgabe der Erforschung einer nur schwierig übersehbaren Gleichung vor, solche Aufgaben drängen sich in der Mathematik nur zu oft auf, so giebt es kein

Digitized by Google

Mittel, als die Bildungsweise der Gleichung in das Auge zu fassen und aus ihr Schlüsse zu ziehen auf die Natur der vorschriftsmässig zu bildenden Gleichung. Mit der ausgerechneten Gleichung würde man sich nur nutzlos belästigen.

Nach dieser Digression kehren wir noch ein Mal zurück zu den durch die Gleichungen (1) gegebenen Kreisen.

Die Aehnlichkeitspunkte von zweien dieser Kreise haben wir in der vorhergehenden Vorlesung durch ihre Gleichungen bestimmt. Hiernach werden die Aehnlichkeitspunkte je zweier von den gegebenen drei Kreisen durch die Gleichungen analytisch ausgedrückt:

$$(11)\ \ldots\quad \begin{matrix} \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 & \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_0}{r_0} = 0 & \frac{A_0}{r_0} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \\ \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0 & \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_0}{r_0} = 0 & \frac{A_0}{r_0} + \frac{A_1}{r_1} = 0. \end{matrix}$$

Es sind dieses Punktgleichungen von derselben Form, wie wir sie am Ende der fünften Vorlesung ausführlich untersucht haben. Wir wiederholen nur die dort gegebenen Sätze, wenn wir uns hier so ausdrücken:

Von den sechs Aehnlichkeitspunkten je zweier von drei gegebenen Kreisen liegen die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte auf einer geraden Linie. Jeder äussere Aehnlichkeitspunkt und jeder innere Aehnlichkeitspunkt liegen auf einer geraden Linie, die wieder durch einen inneren Aehnlichkeitspunkt geht.

Das geometrische Bild der sechs Aehnlichkeitspunkte von drei gegebenen Kreisen sind hiernach die sechs Schnittpunkte von vier geraden Linien. Diese vier geraden Linien, von welchen jede durch drei Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise geht, werden die Aehnlichkeitsaxen der Kreise genannt. Die Aehnlichkeitsaxe, welche durch die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte geht, wollen wir mit dem Namen der äusseren Aehnlichkeitsaxe bezeichnen und in Rücksicht auf sie uns die Aufgabe stellen:

Die Gleichung der äusseren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen drei Kreise (1) zu bestimmen.

Um die Gleichung einer geraden Linie, hier der äusseren Aehnlichkeitsaxe, zusammenzusetzen, braucht man die Gleichungen

Digitized by Google

von drei geraden Linien, welche nicht durch einen und denselben Punkt gehen. Wir wählen die Centralaxen der gegebenen Kreise und bilden zu diesem Zwecke die Ausdrücke:

$$(12)\ \ldots\quad \begin{aligned} B_0 &\equiv (b_1 - b_2)\,x - (a_1 - a_2)\,y + a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ B_1 &\equiv (b_2 - b_0)\,x - (a_2 - a_0)\,y + a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ B_2 &\equiv (b_0 - b_1)\,x - (a_0 - a_1)\,y + a_0 b_1 - a_1 b_0, \end{aligned}$$

von welchen jeder für die Coordinaten von zwei Centren der gegebenen Kreise verschwindet.

Alsdann sind die Gleichungen der Centralaxen 12, 20, 01 der gegebenen drei Kreise (1) der Reihe nach:

$$(13)\ \ldots\ldots\quad B_0 = 0 \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0.$$

Die Gleichungen von drei geraden Linien, von welchen jede ein Kreiscentrum verbindet mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkte, welcher auf der Centralaxe der beiden anderen Kreise liegt, sind von der Form:

$$(14)\quad r_1 B_1 + r_2 B_2 = 0 \qquad r_2 B_2 + r_0 B_0 = 0 \qquad r_0 B_0 + r_1 B_1 = 0.$$

Bestimmen wir nun die unbestimmten Coefficienten $r_0\, r_1\, r_2$ in diesen Gleichungen so, dass die durch die Gleichungen dargestellten geraden Linien durch die genannten äusseren Aehnlichkeitspunkte gehen, deren Coordinaten wir aus den drei ersten Horizontalgleichungen (11) entnehmen, so finden wir, dass jene unbestimmten Coefficienten den Radien $r_0 r_1 r_2$ der gegebenen Kreise gleich werden.

Aus den angegebenen Gleichungen setzen wir endlich die Gleichung der gesuchten äusseren Aehnlichkeitsaxe zusammen:

$$(15)\ \ldots\ldots\quad r_0 B_0 + r_1 B_1 + r_2 B_2 = 0.$$

Die Gleichungen der drei anderen Aehnlichkeitsaxen der gegebenen Kreise erhält man aus dieser (15) durch Veränderung der Vorzeichen der Grössen $r_0\ r_1\ r_2$.

Die eben gelösete Aufgabe gehört in den Kreis der Aufgaben, die wir am Anfange der Vorlesung empfohlen haben. Wir wollen daher die Auflösung (15) noch auf die Form (5) zurückführen, wenn wir gleich daraus weiter keinen Nutzen zu ziehen beabsichtigen. Wir beginnen mit der Darstellung der Gleichungen der Centralaxen in jener Form.

Wenn wir gleich die Ausdrücke $k_0\ k_1\ k_2$ einführen wollten, so würden die gesuchten Gleichungen der Centralaxen der ge-

Digitized by Google

gebenen drei Kreise unnöthig complicirt, weil jene Ausdrücke die Radien der Kreise enthalten, von welchen die Centralaxen unabhängig sind. Wir werden deshalb mit Vortheil von den Bezeichnungen Gebrauch machen:

$$(16)\ \ldots\ \begin{aligned} Q_0 &\equiv k_0 + r_0^2 \equiv (x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 \\ Q_1 &\equiv k_1 + r_1^2 \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 \\ Q_2 &\equiv k_2 + r_2^2 \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2. \end{aligned}$$

Es sind nun $Q_1 - Q_2 = 0$ und $Q_2 - Q_0 = 0$ die Gleichungen von zwei ganz bestimmten geraden Linien. Aus diesen Gleichungen setzen wir nun mit den willkürlichen Coefficienten $\lambda\ \mu$ die Gleichung jeder beliebigen geraden Linie zusammen:

$$(Q_1 - Q_2) + \lambda\,(Q_2 - Q_0) + \mu = 0.$$

Soll diese Gleichung die Centralaxe 12 darstellen, so müssen die Coefficienten λ, μ so bestimmt sein, dass der Gleichung genügt wird sowohl für $x = a_1$ und $y = b_1$ als für $x = a_2$ und $y = b_2$. Bestimmen wir darnach die Werthe von λ und μ und setzen sie in die Gleichung ein, so ergiebt sich die Gleichung der gesuchten Centralaxe 12:

$$\begin{aligned} &([01]^2 - [02]^2)(Q_1 - Q_2) - [12]^2(Q_2 - Q_0) + [12]^2(Q_0 - Q_1) - \\ &\quad - [12]^2([02]^2 + [01]^2 - [12]^2) = 0. \end{aligned}$$

Wir leiten hieraus die Gleichungen $C_0 = 0$ $C_1 = 0$ $C_2 = 0$ der gesuchten Centralaxen 12 20 01 der Reihe nach ab:

$$(17)\ \begin{aligned} C_0 &\equiv ([01]^2 - [02]^2)(Q_1 - Q_2) - [12]^2(Q_2 - Q_0) + [12]^2(Q_0 - Q_1) - \\ &\quad - [12]^2([02]^2 + [01]^2 - [12]^2) = 0 \\ C_1 &\equiv [20]^2(Q_1 - Q_2) + ([12]^2 - [10]^2)(Q_2 - Q_0) - [20]^2(Q_0 - Q_1) - \\ &\quad - [20]^2([10]^2 + [12]^2 - [20]^2) = 0 \\ C_2 &\equiv -[01]^2(Q_1 - Q_2) + [01]^2(Q_2 - Q_0) + ([20]^2 - [21]^2)(Q_0 - Q_1) - \\ &\quad - [01]^2([21]^2 + [20]^2 - [01]^2) = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen die Form (5) annehmen, wenn man nach (16) $Q_0\ Q_1\ Q_2$ ausdrückt durch $k_0\ k_1\ k_2$.

Bemerken wir nun, dass die Gleichungen (17) $C_0 = 0$ $C_1 = 0$ $C_2 = 0$ dieselben Centralaxen darstellen, als die Gleichungen (13) $B_0 = 0$ $B_1 = 0$ $B_2 = 0$, so können wir daraus schliessen, dass sich drei Factoren $\varrho_0\ \varrho_1\ \varrho_2$ der Art bestimmen lassen müssen, dass man identisch hat:

$$C_0 \equiv \varrho_0 B_0 \quad C_1 \equiv \varrho_1 B_1 \quad C_2 \equiv \varrho_2 B_2.$$

Digitized by Google

Es bedarf nur der Bestimmung eines dieser Factoren, die anderen ergeben sich leicht aus ihm nach dem Bildungsgesetz der Gleichungen.

Wir setzen die Coefficienten von x in der ersten identischen Gleichung auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich und finden

$$-\tfrac{1}{4}\varrho_0 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 b_0 - a_0 b_2) + (a_0 b_1 - a_1 b_0).$$

Aus diesem Werthe von ϱ_0 und dem erwähnten Bildungsgesetze der Gleichungen schliessen wir weiter, dass sämmtliche Factoren $\varrho_0\ \varrho_1\ \varrho_2$, was sich auch ausrechnen lässt, einander gleich sind und dass jene identischen Gleichungen sich einfacher so darstellen lassen:

$$B_0 \equiv \frac{1}{\varrho_0} C_0 \qquad B_1 \equiv \frac{1}{\varrho_0} C_1 \qquad B_2 \equiv \frac{1}{\varrho_0} C_2.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (15) der äusseren Aehnlichkeitsaxe, so geht dieselbe über in:

$$(18) \ldots\ldots \quad r_0 C_0 + r_1 C_1 + r_2 C_2 = 0.$$

Wir erhalten aus dieser Gleichung endlich die Gleichung der äusseren Aehnlichkeitsaxe in der gewünschten Form (5), wenn wir für $C_0\ C_1\ C_2$ ihre Ausdrücke (17) setzen und hierauf für $Q_0\ Q_1\ Q_2$ aus (16) ihre Werthe:

$$Q_0 = k_0 + r_0^2, \quad Q_1 = k_1 + r_1^2, \quad Q_2 = k_2 + r_2^2.$$

Den Pol der äusseren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen drei Kreise (1) in dem Kreise $k_0 = 0$ zu bestimmen.

In der vorhergehenden Vorlesung haben wir unter (22) und (21) die Gleichung der Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes der Kreise $k_1 = 0$ und $k_0 = 0$ in dem letzteren Kreise aufgestellt. Bilden wir darnach auch die Gleichung der Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes der Kreise $k_2 = 0$ und $k_0 = 0$ in dem letzteren, so haben wir die Gleichungen der beiden Polaren in dem Kreise $k_0 = 0$:

$$(19) \ldots \quad \frac{k_1 - k_0}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - 1 = 0 \qquad \frac{k_2 - k_0}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2} - 1 = 0,$$

die sich in dem zu bestimmenden Pol der äusseren Aehnlichkeitsaxe schneiden, weil ihre Pole auf der äusseren Aehnlichkeits-

Digitized by Google

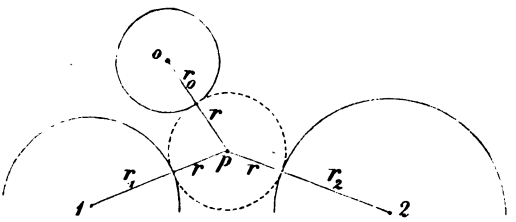
axe liegen. Die aus diesen beiden Gleichungen linear zu berechnenden Coordinaten sind demnach die Coordinaten des gesuchten Poles.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen schliessen wir die Vorlesung mit der Auflösung der Aufgabe:

Den Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise (1) berührt.

Man kann mehrere Auflösungen der Aufgabe finden. Um eine bestimmte Auflösung zu fixiren, wollen wir annehmen, dass die gegebenen Kreise ausserhalb von einander liegen und dass auch jeder gegebene Kreis ausserhalb des gesuchten Kreises liege, wie in der Figur:

Fig. 14.



Wir werden die Coordinaten x, y des Mittelpunktes p und den Radius r des Kreises suchen, der die gegebenen Kreise (1) berührt. Sie werden mit Rücksicht auf die in der vorhergehenden Vorlesung eingeführten Bezeichnungen (1) durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(20) \quad k_0 + r_0^2 = (r+r_0)^2 \quad k_1 + r_1^2 = (r+r_1)^2 \quad k_2 + r_2^2 = (r+r_2)^2,$$

welche nichts weiter ausdrücken, als was wir unmittelbar aus der Figur absehen, dass:

$$[p0]^2 = (r + r_0)^2 \quad [p1]^2 = (r + r_1)^2 \quad [p2]^2 = (r + r_2)^2.$$

Die angegebenen drei Gleichungen (20) lösen das Problem. Denn berechnen wir aus ihnen die drei Unbekannten x, y, r, so erhalten wir die Coordinaten des Mittelpunktes und den Radius des gesuchten Kreises.

Die anderen Lösungen werden aus jenen Gleichungen (20) erhalten, wenn man die Vorzeichen der drei Grössen r_0 r_1 r_2

Digitized by Google

ändert. Da dieses sieben Mal geschehen kann, so haben wir 8 Auflösungen unserer Aufgabe.

Von diesen 8 Auflösungen heben wir zwei hervor, nämlich den in Rede stehenden Fall, wenn der gesuchte Kreis die gegebenen Kreise ausschliesst, und den Fall, wenn die gegebenen Kreise sämmtlich innerhalb des gesuchten Kreises liegen. Die dem letzteren Fall entsprechenden Gleichungen erhalten wir aus jenen Gleichungen (20), wenn wir für $r_0\ r_1\ r_2$ respective setzen $-r_0\ -r_1\ -r_2$. Das Gemeinsame dieser beiden Fälle wird die weitere Behandlung der Gleichungen (20) lehren. Aber auch die anderen sechs Fälle paaren sich der Art, dass der eine aus dem anderen hervorgeht, wenn man die den Grössen $r_0\ r_1\ r_2$ zukommenden Vorzeichen in die entgegengesetzten übergehen lässt.

Die das Problem lösenden Gleichungen (20) enthalten ausser den ersten Potenzen der Unbekannten noch die Quadrate derselben. Letztere eliminiren wir, wenn wir je zwei Gleichungen von einander abziehen. Dadurch erhalten wir die drei linearen Gleichungen:

$$(21)\quad k_1 - k_2 = 2r(r_1 - r_2)\quad k_2 - k_0 = 2r(r_2 - r_0)\quad k_0 - k_1 = 2r(r_0 - r_1),$$

welche aber nur die Stelle von zwei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten vertreten, weil ihre Summe identisch 0 giebt.

Wenn wir nun mittelst zweier von diesen Gleichungen die Coordinaten x, y linear durch r ausdrücken und diese Ausdrücke für x und y in eine von den Gleichungen (20) setzen, so erhalten wir eine quadratische Gleichung in r. Diese quadratische Gleichung hat man aufzulösen. Die eine Wurzel der Gleichung wird der Radius des gesuchten Kreises sein. Welche geometrische Bedeutung die andere Wurzel hat, werden wir zu untersuchen haben.

Multipliciren wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (21) der Reihe nach mit r_0, r_1, r_2 und addiren, so erhalten wir:

$$(22)\ \ldots\quad r_0(k_1 - k_2) + r_1(k_2 - k_0) + r_2(k_0 - k_1) = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, wenn wir die Coordinaten x, y als Variable betrachten.

Auf dieser geraden Linie liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, weil seine Coordinaten eben der Gleichung genügen.

Digitized by Google

Der Kreis mit seinem Mittelpunkt wird ein anderer, nämlich der zweite oben hervorgehobene Fall, wenn wir die Vorzeichen sämmtlicher Grössen r_0 r_1 r_2 ändern, aber die Gleichung (22) und die gerade Linie, die sie darstellt, ändern sich dadurch nicht. Daraus schliessen wir, dass die Mittelpunkte der beiden Kreise auf der geraden Linie (22) liegen.

Beachten wir ferner die Zusammensetzung der Gleichung (22) aus den Gleichungen (6) der gemeinschaftlichen Secanten, die sich in ihrem Centrum C schneiden, so sehen wir, dass auch das Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten der gegebenen drei Kreise auf dieser geraden Linie (22) liegt.

Eine zweite Eigenschaft der geraden Linie (22) ergiebt sich aus dem Produkt ihrer Gleichung und der Gleichung (15) der äusseren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise. Da in der Entwickelung des Produktes, wie leicht zu erkennen, die Coefficienten von x^2 und y^2 gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sind, so folgt daraus, dass die genannten beiden geraden Linien auf einander senkrecht stehen.

Mit der Erweiterung der gemachten Bemerkungen auf die anderen Aehnlichkeitsaxen der gegebenen drei Kreise geben wir dieselben in dem Satze kurz wieder:

Wenn man von dem Centrum der gemeinschaftlichen Secanten dreier gegebenen Kreise Lothe fällt auf die vier Aehnlichkeitsaxen der Kreise, so liegen auf jedem der vier Lothe zwei Mittelpunkte der die gegebenen Kreise berührenden 8 Kreise.

Fällen wir demnach von dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten der gegebenen drei Kreise ein Loth auf die äussere Aehnlichkeitsaxe derselben, so wissen wir, dass die Mittelpunkte der beiden hervorgehobenen Berührungskreise auf diesem Lothe liegen. Da die Bestimmung der Mittelpunkte selbst aber, wie wir gesehen haben, auf eine quadratische Gleichung zurückführt, so ist die Construction derselben nicht ohne Hülfe eines Kreises ausführbar.

Wir wählen als Mittel hierzu den gegebenen Kreis $k_0 = 0$, und werden auf ihm den Berührungspunkt zu bestimmen suchen. Da der Berührungspunkt, dessen Coordinaten x' y' sein mögen, auf der Verbindungslinie der Punkte x, y und a_0, b_0 liegt und

Digitized by Google

von ihnen um r und r_0 absteht, so haben wir die Relationen zwischen den Coordinaten dieser Punkte:

$$x = \frac{(r + r_0)\, x' - r a_0}{r_0} \qquad y = \frac{(r + r_0)\, y' - r b_0}{r_0}.$$

Setzen wir diese Werthe von x und y in die beiden letzten linearen Gleichungen (21) ein, und beachten, dass jeder lineare Ausdruck der Variabeln x, y durch die angegebenen Substitutionen für die Variabeln übergeht in das Produkt $\frac{r + r_0}{r_0}$ und des linearen Ausdruckes mit der Veränderung von x und y in x' und y' minus dem Produkt von $\frac{r}{r_0}$ und demselben linearen Ausdruck mit der Veränderung von x und y in a_0 und b_0, so finden wir ohne Rechnung, wenn wir mit k_0', k_1', k_2' die Ausdrücke k_0, k_1, k_2 bezeichnen, nach Vertauschung der Coordinaten x, y mit x', y':

$$\frac{r + r_0}{r_0}(k_2' - k_0') - \frac{r}{r_0}([02]^2 - r_2^2 + r_0^2) = 2r(r_2 - r_0)$$
$$\frac{r + r_0}{r_0}(k_0' - k_1') - \frac{r}{r_0}(-r_0^2 - [01]^2 + r_1^2) = 2r(r_0 - r_1).$$

Woraus nach der Reduction die Gleichungen für den Berührungspunkt hervorgehen:

$$(23) \quad \frac{k_1' - k_0'}{[10]^2 - (r_1 - r_0)^2} - \frac{r}{r + r_0} = 0 \qquad \frac{k_2' - k_0'}{[20]^2 - (r_2 - r_0)^2} - \frac{r}{r + r_0} = 0,$$

Gleichungen, welche sich von den, den Pol der äusseren Aehnlichkeitsaxe im Kreise $k_0 = 0$ bestimmenden, Gleichungen (19) nur durch das Glied $\frac{r}{r + r_0}$ unterscheiden, welches dort gleich der Einheit ist. Wir erhalten daher die Gleichung derselben geraden Linie, wenn wir die Differenz der Gleichungen (19) oder die Differenz der Gleichungen (23) bilden.

Die Differenz der Gleichungen (19) stellt eine gerade Linie dar, welche den Pol, den die Gleichungen im Kreise $k_0 = 0$ bestimmen, mit dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten verbindet. Die Differenz der Gleichungen (23) stellt dieselbe gerade Linie dar, welche durch den gesuchten Berührungspunkt des Kreises $k_0 = 0$ geht. Ziehen wir demnach von dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten der gegebenen Kreise durch den Pol der äusseren Aehnlichkeitsaxe im Kreise $k_0 = 0$ eine gerade Linie, so geht diese durch den Berührungspunkt des Kreises $k_0 = 0$.

Digitized by Google

Da die Differenz der Gleichungen (23) ungeändert bleibt, wenn man die Vorzeichen sämmtlicher Radien $r_0\ r_1\ r_2$ ändert, so geht jene gezogene gerade Linie auch durch den Punkt des Kreises $k_0 = 0$, in welchem derjenige Berührungskreis, der die gegebenen drei Kreise umschliesst, jenen berührt.

Hieraus ergiebt sich nun folgende Construction des Mittelpunktes und des Radius des, die gegebenen drei Kreise berührenden, Kreises.

Wir ziehen eine von den vier Aehnlichkeitsaxen der gegebenen drei Kreise und bestimmen den Pol derselben in dem Kreise $k_0 = 0$. Die Verbindungslinie dieses Poles mit dem Centrum C der gemeinschaftlichen Secanten schneidet den Kreis $k_0 = 0$ in zwei Punkten. Der eine Schnittpunkt wird der Berührungspunkt eines, der andere der Berührungspunkt eines anderen von den acht Berührungskreisen sein.

Um den Mittelpunkt des Berührungskreises zu bestimmen, ziehen wir einen Radius des Kreises $k_0 = 0$ durch einen jener Berührungspunkte und verlängern denselben, bis er das von dem Centrum C auf die Aehnlichkeitsaxe gefällte Loth schneidet. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises und sein Radius verbindet den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte.

Die angegebene Construction lässt sich an jedem der gegebenen Kreise, wie an dem Kreise $k_0 = 0$, ausführen. Sie ist unsymmetrisch. Wir ziehen es daher vor, an die Stelle der Construction den durch das Vorhergehende bewiesenen symmetrischen Satz aufzustellen:

Wenn man von dem Centrum der gemeinschaftlichen Secanten dreier gegebenen Kreise durch die Pole einer Aehnlichkeitsaxe in den drei Kreisen drei gerade Linien zieht, so schneidet jede dieser Linien den Kreis, durch dessen Pol sie geht, in den Punkten, in welchen die gegebenen Kreise von zwei Kreisen zugleich berührt werden.

Aus diesem Satze und dem vorhergehenden ist die Construction des Berührungskreises an drei gegebene Kreise leicht abzusehen.

Digitized by Google

Neuerer Verlag

von

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

zur Litteratur der

Mathematik und Physik,

der Mechanik

und des Eisenbahn- und Maschinenwesens.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Clebsch, Dr. A., Prof. an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe, Theorie der Elasticität fester Körper. gr. 8. 1862. geh. n. 3 Thlr.

„Der Herr Verfasser hatte als Lehrer an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe Gelegenheit und Beruf, sich ausführlicher mit den Anwendungen der allgemeinen Theorie der Elasticität auf die in der Technik besonders wichtigen Fälle zu beschäftigen. Die Resultate dieser Studien liegen uns jetzt in einem ziemlich umfangreichen Werke vor, und man kann dem Verfasser nur Dank wissen, dass er unsere deutsche Literatur um eine Schrift bereichert hat, welche einerseits dem Techniker das Erlernen der strengen Theorie ermöglicht, ihm über die Genauigkeit seiner Resultate und die Zulässigkeit der in der Praxis üblichen Voraussetzungen Aufschluss giebt, andererseits den Mathematiker belehrt, wie man von den allgemeinsten Gleichungen der Bewegungen und des Gleichgewichts elastischer Körper zu speciellen Fällen gelangen kann, und ihm die grosse Mühe und Zeit erspart, in den Arbeiten der Techniker den Weizen von der Spreu zu sondern. Es ergänzt daher dieses Handbuch das berühmte Werk des französischen Physikers Lamé, welches vorzüglich die allgemeinen Differentialgleichungen, ihre eleganten Transformationen, die Theorie der krystallinischen Körper und ihre optischen Eigenschaften behandelt, während Herr Clebsch ausschliesslich unkrystallinische Körper und deren Verschiebungen durch äussere Kräfte in Betrachtung zieht.“ [Literarisches Centralblatt 1863, No. 31.]

Duhamel, Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch herausgegeben von Dr. Oskar Schlömilch, Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der polytechnischen Schule in Dresden. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Neue wohlfeile Ausgabe. Zwei Bände. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. Beide Bände zusammen 2 Thlr.

Einzelne Bände werden in dieser wohlfeilen Ausgabe nicht abgegeben.

Nach dem Urtheile der gewichtigsten Autoritäten ist Duhamel's Cours de mécanique de l'école polytechnique in seiner Art das vollständigste und zugleich in seiner Behandlungsweise das eleganteste Lehrbuch der analytischen Mechanik, welches die Litteratur überhaupt besitzt, so dass dasselbe schon seit Jahren den Vorlesungen und dem Unterrichte auf deutschen Universitäten und höheren technischen Bildungsanstalten im Original zu Grunde gelegt wird. — Die Verlagshandlung glaubte deshalb einem entschiedenen Bedürfnis zu begegnen, wenn sie eine deutsche Ausgabe veranstaltet hat und zwar in einer Bearbeitung, welche sowohl eine sorgfältige und elegante Uebersetzung bietet, als auch das Original, wo es nöthig ist, ergänzt und berichtigt. In dieser Beziehung wird der Name des Herrn Professor Schlömilch die vollständigsten Garantien bieten.

Durège, Dr. H., ordentlicher Professor am Polytechnicum zu Prag, Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung. Mit 32 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. n. 2 Thlr. 20 Ngr.

„Trotz der hohen Bedeutung, welche die elliptischen Functionen für die gesammte Analysis, für die analytische Mechanik und selbst für die Zahlentheorie gewonnen haben, existierte doch bisher kein Elementarlehrbuch derselben und der Jünger der Wissenschaft blieb wie vor 25 Jahren darauf angewiesen, seine Belehrung aus den Quellen (Legendre, traité des fonctions elliptiques, und Jacobi, fun-

Digitized by Google

damenta funct. ellipt. nebst einer, grossen Anzahl einzelner Abhandlungen in Crelle's Journal) zu schöpfen. Die Herausgabe des vorliegenden Werkes darf daher als ein glücklicher Gedanke bezeichnet werden und es ist damit jedenfalls eine fühlbare Lücke der Litteratur zum Besten der Studierenden ausgefüllt worden. — — Das Werk bietet genug, ja hie und da vielleicht mehr als genug für das erste Studium der genialen Schöpfungen von Legendre, Abel und Jacobi. Die Darstellung muss als sehr deutlich bezeichnet werden u. s. w." [Schlömilch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1862, 1. Heft.]

——— Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns. gr. 8. 1864. geh. n. 1 Thlr. 18 Ngr.

„Ich möchte, nach allen diesen Ueberlegungen, das Werk von Durège allen Anfängern empfehlen, welche sich eine erste Kenntniss der modernen mathematischen Anschauungsweisen erwerben wollen. Ich halte dafür, es sei sehr zweckmässig, dass der Lernende ziemlich bald sich an die Betrachtung der Eigenschaften der Functionen gewöhnt. Das gewöhnliche mathematische, mehr rechnende Verfahren, wird durchaus nicht überflüssig durch diese neuere Betrachtungsweise; es lassen sich aber oftmals doch sehr grosse Rechnungen ersparen; ferner, was sowohl für das Studium, als auch für selbstständige Arbeiten von grösstem Werthe ist, die Möglichkeit gewisser Darstellungen (als z. B. der elliptischen Functionen durch die ϑ) lässt sich sofort übersehen; es wird dadurch leichter, den Faden einer gegebenen Rechnung, welche man nachstudirt, zu behalten, und es kann viel zielloses Rechnen bei selbstständigen Arbeiten vermieden werden. Ich empfehle daher das Werk nochmals einem Jeden, welcher sich mit Riemann'schen Arbeiten vertraut machen will, zum Vorstudium." [G. Roch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1865, 4. Heft.]

Fiedler, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnikum zu Prag, die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. gr. 8. 1862. geh. n. 1 Thlr. 14 Ngr.

Diese Arbeit des rühmlichst bekannten Verfassers ist aus dem Wunsche entsprungen, zur allgemeineren Verbreitung der Kenntnis der von der „neueren Algebra" benutzten Methode beizutragen, und durch ausführlichere Darlegung der betreffenden Theorien für binäre Formen auf **Salmon's Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen** vorzubereiten.

Fort, O., und O. Schlömilch, Professoren an der Königl. polytechnischen Schule in Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zwei Theile. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Auflage. gr. 8. 1863. geh. 2 Thlr. 22½ Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Analytische Geometrie der Ebene,** von O. Fort. 1 Thlr. 7½ Ngr.

II. » **Analytische Geometrie des Raumes** von O. Schlömilch. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie ist vorzugsweise für den Unterricht an technischen und anderen höheren Schulen bestimmt. Der ungetheilte Beifall, den dasselbe gefunden, hat bereits eine zweite Auflage nöthig gemacht. Wo die fernere Einführung beabsichtigt wird, stellt die Verlagshandlung dem betreffenden Lehrer gern ein Freiexemplar behufs vorheriger Prüfung zur Verfügung.

Hesse, Otto, ordentlicher Professor an der Universität zu Heidelberg, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. gr. 8. 1861. geh. n. 2 Thlr. 12 Ngr.

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Coordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Functionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor Kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disciplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedler'schen Uebertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Literatur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dass der Verfasser desselben vor Allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Theile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelle's Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muss Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] Für Leser, welche mit den nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w."

[O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik, 1862, 2. Heft.]

Digitized by Google

Kahl, Dr. E., Lehrer der Physik an der Kriegsschule in Dresden, mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche höherer Schulanstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2 Theile. gr. 8. 1857. geh. n. 1 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Aufgaben.** n. 24 Ngr.

II. » **Auflösungen.** n. 20 Ngr.

„Je zahlreicher und umfänglicher man Aufgaben-Sammlungen aus dem Gebiete der reinen Mathematik besitzt, desto seltener und verhältnismässig weniger ausführlich hat man sie für angewandte Mathematik und für Physik. Insofern ist daher schon jeder Beitrag für die specielle Literatur letzteren Gegenstandes als eine ebenso erwünschte wie dankenswerthe Erscheinung auf dem Büchermarkte zu betrachten, wie auch übrigens der Verfasser bei Bearbeitung einer selbstständigen Sammlung dieser Art zu Werke gegangen sein mag. Wir brauchen indessen bezüglich vorliegender Sammlung bei diesem einfachen und allgemeinen Urtheile nicht stehen zu bleiben vielmehr wird Jeder nach Einsicht in dieselbe darin mit uns übereinstimmen, dass dieselbe für den Schul- und Privatgebrauch ein recht instructives Hilfsmittel zur Aneignung und zum klaren Verständnis der Hauptlehren der Physik darbietet. Sie unterscheidet sich zunächst von anderen derartigen Sammlungen, z. B. von der Fliedner'schen, auch darin, dass der Gebrauch der Differential- und Integralrechnung für einzelne Beispiele nicht ausgeschlossen ist, ohne jedoch die Kenntnis dieses Theiles der Mathemaik durchgängig vorauszusetzen, indem die Mehrzahl der Beispiele davon unabhängig gestellt ist." [Witzschel, in d. Zeitschr. f. Mathem. 1858, 6. Heft.]

Kohl, Friedrich, Elemente von Maschinen zunächst als ein Leitfaden für Gewerbschüler. I. und II. Abtheilung in einem Bande. Mit 31 lithographierten Tafeln und 157 in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Ausgabe. 4. 1858. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Die Abtheilungen einzeln sind nicht mehr vorhanden.

Auf 31 lithographierten Tafeln und 157 in den Text gedruckten Holzschnitten bietet das vorliegende Buch eine so reichhaltige Sammlung von instructiven Zeichnungen der wichtigsten Maschinentheile, dass es ebensowohl als Leitfaden beim Unterricht in Gewerbschulen wie zum Selbstunterricht für Gewerbtreibende vorzügliche Dienste leistet. Der Preis ist ausserordentlich billig.

Kröhnke, H., Civilingenieur und bestallter Landmesser, Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs Sorgfältigste berechnet und herausgegeben. Vierte durchgesehene Auflage. Mit einer Figurentafel. 8. 1864. gebunden 18 Ngr.

„Vorstehendes Taschenbuch, welches sich durch concise Form und Bequemlichkeit für den Gebrauch jedem praktischen Geometer und Ingenieur empfiehlt, enthält alle diejenigen Daten, welche erforderlich sind, um nach der Methode, von den Tangenten und Hülfstangenten aus den Bogen zu bestimmen, Curven für Strassen- und Eisenbahnanlagen abzustecken. Die Einleitung enthält eine kurze, dabei aber sehr klare und bündige Instruction für die Ausführung der beim Abstecken der Curven vorkommenden geometrischen Operationen, für die Behandlung der zu diesem Zwecke erforderlichen Instrumente und für den Gebrauch der den Hauptinhalt des Taschenbuchs bildenden beiden Tabellen. Von diesen Tabellen enthält die erste die Werthe der Tangente, Bogenlänge, halben Sehne, der Coordinaten des Mittelpunktes und dessen Abstandes vom Winkelpunkt der Curve für den Radius 1000 und die Grösse des Centriwinkels von 0 bis 120 Grad, um 2 Minuten jedesmal wachsend. Die zweite Tabelle enthält die Abscissen und Ordinaten zur Absetzung äquidistanter Bogenpunkte für alle vorkommenden Radien von 10 bis 10,000. Mehrfache Revisionen berechtigen den Herrn Verfasser, wie er in der Vorrede sagt, beide Tabellen als vollkommen fehlerfrei und zuverlässig zu bezeichnen." [Eisenbahnzeitung 1852, Nr. 26.]

Die Verbreitung in 3 starken Auflagen ist überdies der beste Beweis für die Brauchbarkeit und Zuverlässigkeit des Buches.

Lindelöf, Dr. L., Professeur de Mathematiques à Helsingfors, leçons de calcul des variations. Redigées en collaboration avec M: L'abbé Moigno. Paris 1861. gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

Mittheilungen der K. Sächs. Polytechnischen Schule zu Dresden. Heft I. A. u. d. T.: Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Streichgarnspinnerei und Tuchfabrikation, ausgeführt von Dr. Ernst Hartig, Lehrer der mechan. Technologie an der Kgl. Polytechn. Schule. Unter Mitwirkung der Polytechniker Arndt, Jüngling, Klien und Künzel. [VIII u. 72 S. mit 11 lithographierten Tafeln in 4. u. qu. Folio.] hoch 4. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

Digitized by Google

Müller, Dr. J. H. T., Oberschulrath etc., Beiträge zur Terminologie der Griechischen Mathematiker. gr. 8. 1860. geh. n. 8 Ngr.

„Es sind nur 2½ Druckbogen, welche der Verfasser unter dem Titel von Beiträgen veröffentlicht, aber wer den Inhalt prüft, wird über die Fülle erstaunen, welche in dem kleinen Raume zusammengedrängt ist u. s. w." [Zeitschrift für Mathematik 1860, 6. Heft.]

Neumann, Carl, Professor in Tübingen, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographierten Tafel. gr. 8. 1865. geh.

Eine Darstellung der Abel'schen Integrale, durch welche dieselbe auch denen verständlich wird, deren mathematische Kenntnisse noch gering sind. Der Student welcher sein erstes oder seine beiden ersten Semester einigermassen gut angewendet hat, soll durch dieses Buch in den Stand gesetzt werden, in das Innere jener schwierigen und bis jetzt fast vollständig unzugänglichen Theorie sofort und mit allem Verständnis einzudringen.

Roch, Dr. G., de theoremate quodam circa functiones Abelianas. 4. geh. n. 6 Ngr.

Ruete, Dr. C. G. Th., Professor und Geh. Medicinalrath, das Stereoscop. Eine populäre Darstellung. Mit 20 stereoscopischen Bildern in einer Beilage. gr. 8. 1860. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

„Der Verfasser hat nicht blos das Wesen des Stereoscopes wie des stereoscopischen Sehens behandelt, sondern auch die psychologischen, physikalischen und physiologischen Vorbegriffe vorausgeschickt. Er hat die Erklärung der Erscheinungen durch Beispiele erläutert, und diese durch eine beigegebene Sammlung von stereoscopischen Bildern vermehrt. Das Werk ist ebenso wissenschaftlich als populär im wahren Sinne des Wortes geschrieben, und es ist nicht blos jedem Gebildeten, dem das Stereoscop zur Unterhaltung dient, sondern auch dem Psychologen, Physiker und Physiologen zum Studieren, dem Lehrer als Hilfsmittel, dem Finanzmann als Mittel zum Erkennen der Copien vom Originale und der falschen Werthpapiere von echten anzuempfehlen."

[Lukas, in der „Zeitschrift für Stereoscopie". II. Jahrgang, Nr. 19.]

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. gr. 8. 1860. geh. n. 4 Thlr.

„Diese Bearbeitung eines im englischen Original bereits in 3 Auflagen erschienenen vorzüglichen Buches umschliesst in ihrem Haupttheile eine fast vollständige Darlegung des gegenwärtigen Standes der auf die Kegelschnitte bezüglichen Lehren mit Zugrundelegung der wichtigsten algebraischen und geometrischen Methoden u. s. w. Der deutsche Bearbeiter hat die Arbeiten deutscher Mathematiker, namentlich von Möbius, Plücker, Steiner u. A. mit berücksichtigt und dadurch den bereits vielseitig anerkannten Werth des Originals wesentlich erhöht. Jedenfalls verdient der Bearbeiter den Dank des deutschen Publikums für die Gründlichkeit und Umsicht, mit welcher er sich der Aufgabe unterzogen hat, das Buch zu einer möglichst vollständigen und gründlichen Einführung in die gegenwärtige wissenschaftliche Situation der analytischen Geometrie zu gestalten. Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grosse Menge von mehr als vierhundert grossentheils vollständig durchgeführten Aufgaben." [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik 1861, 3. Heft.]

Salmon, George, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. gr. 8. 1863. geh. n. 1 Thlr. 24 Ngr.

Diese deutsche Ausgabe von Rev. George Salmon's „Lessons introductory to the modern higher Algebra" ist in einigen Punkten verändert, in andern erweitert und nach dem Stande der Entdeckungen vervollständigt worden. Der Theorie der symmetrischen Determinanten ist eine Vorlesung gewidmet, überhaupt die Determinantentheorie vielfach erweitert, namentlich auch die Zahl der Beispiele vermehrt worden. Diese Erweiterung steht in Verbindung mit der vollständigeren Behandlung der Theorie der Jacobi'schen und derjenigen der Hesse'schen Determinante, welche als Beispiele für eine Form der Behandlung gegeben sind, die in analytischer Beziehung unleugbare Vorzüge vor derjenigen hat, durch die der Grundcharacter des Originals bestimmt ist. In der Uebersicht der Resultate der Theorie für die biquadratischen ternären Formen ist auf die schönen Untersuchungen von Clebsch Bezug genommen und ein kurzer Abriss der Resultate gegeben werden, welche die algebraische Theorie der binären und ternären Formen für die elliptischen Transcendenten ans Licht gebracht hat. — Das Buch schliesst sich in seiner Bedeutung für die mathematischen Studien dem vorhergehenden Werke desselben Verfassers würdig an.

Digitized by Google

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, ord. Professor der descriptiven Geometrie am Polytechnicum zu Prag. 2 Theile. gr. 8. 1863. 1865. geh. 5 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil: A. u. d. T.: Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten. gr. 8. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

II. Theil: A. u. d. T.: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. gr. 8. geh. 3 Thlr. 20 Ngr.

„Die ausgezeichnete Begabung des Verfassers für die Darstellung analytisch-geometrischer Untersuchungen, als auch die Tüchtigkeit des Herrn Uebersetzers sind so anerkannt, dass es unnöthig erscheint, irgend etwas zur Empfehlung des vorliegenden Werkes hinzuzufügen."

[Literar. Centralblatt, 1864, Nr. 38.]

Schell, Dr. W., Professor der Mathematik in Marburg, allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1859. geh. n. 24 Ngr.

„Das vorliegende Werkchen kann allen denen, die sich mit der geometrischen Betrachtungsweise der wichtigen Theorie der doppelt gekrümmten Curven, sowie vieler anderer dazu gehöriger geometrischer Gebilde vertraut machen wollen, nur bestens empfohlen werden. Sie werden darin ein reiches Material für die Uebung in der geometrischen Anschauung und Verbindung vorfinden, das der Verfasser ihnen in klarer und gedrängter Darstellung vor Augen geführt. Wir können nur wünschen, dass derselbe dem wissenschaftlichen Publikum seine weiteren Untersuchungen über die hier behandelten Gegenstände in nicht ferner Zeit zur Kenntnis bringen möge."

[Heidelberger Jahrbücher 1859, Nr. 38.]

Schmidt, Carl Heinrich, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart, Lehrbuch der Spinnereimechanik. Mit einem Atlas von 13 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1857. (Der Atlas quer-Folio). n. 3 Thlr.

Dieses Lehrbuch der Spinnereimechanik beschäftigt sich vorzugsweise mit dem theoretischen Theile des Spinnereifaches. Es zerfällt in vier Abtheilungen: **I. Flachs- und Wergspinnerei. II. Baumwollspinnerei. III. Schafwollspinnerei. IV. Bewegungsgesetze und Bewegungsmechanismen für die Aufwindung des Vorgarnes** — und hat ebensowohl in Gewerb- und anderen technischen Schulen, als auch unter den Praktikern des Spinnereifaches allgemeine Anerkennung und weite Verbreitung gefunden.

Schneitler, Dr. C. F., Civilingenieur, die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst, sowie der geometrischen Zeichenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Mit 236 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1861. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

„Dieses Werk erschien nach einem Zeitraume von 10 Jahren schon in der vierten Auflage, was unstreitig den Beweis von seinem werthvollen Inhalte liefert. Die neueste Auflage ist gegenüber den frühern bedeutend vermehrt und an manchen Stellen verbessert worden. Es bildet dieses Buch eine nothwendige Ergänzung zu dem **„Lehrbuch der gesammten Messkunst"** desselben Verfassers, und kann Ingenieuren sowie Schülern technischer Lehranstalten bestens empfohlen werden."

[Schweizerische Polytechnische Zeitschrift.]

——— Lehrbuch der gesammten Meßkunst oder Darstellung der Theorie und Praxis des Feldmessens, Nivellirens und Höhenmessens, der militärischen Aufnahmen ganzer Länder, sowie der geometrischen Zeichenkunst. Zum Selbststudium und Unterrichte bearbeitet. Dritte verbesserte Auflage. Mit 225 in den Text gedruckten Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr.

Die geodätischen Werke Schneitler's entsprechen so sehr einem praktischen Bedürfnisse, dass ihre Verbreitung in fortwährendem Steigen begriffen ist. Die vorliegende dritte Auflage des „Lehrbuchs der Messkunst", welches mit dem gleichzeitig in vierter Auflage erschienenen Werke: **„die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst"** ein Ganzes bildet, ist eine wesentlich verbesserte. Insbesondere ist der ganze Abschnitt „Nivelliren" durch Herrn Regierungsconducteur Stocken in Breslau vollständig neu bearbeitet und damit das Buch gerade in einer Partie erweitert worden, deren genaue Kenntnis in unserer Zeit von besonderer Bedeutung für die grossartigen Landes-Meliorationen (Bruch- und Moorbauten, Drain-Anlagen) ist. Der Preis ist ausserordentlich billig.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andrée, Civilingenieurs, Sammlung von Werkzeichnungen landwirthschaftlicher

Digitized by Google

Maschinen und Geräthe nebst ausführlichen Beschreibungen. 7 Hefte. Mit 42 Tafeln in gr. Royal-Fol. Text in 4. 1853—1857. geh. n. 38 Thlr.

Einzeln:

I. Heft, die Drainröhren- und Ziegelpressen auf 7 Foliotafeln: 1) Randell und Sanders Thonröhrenpresse mit mechanischer Abschneide-Vorrichtung; 2) Drainröhrenpresse von Egells in Berlin; 3) Doppeltwirkende Drainröhrenpresse von J. Whitehead in Preston; 4) Drainröhrenpresse von J. Williams in Bedford; 5) Doppelwirkende Drainröhrenpresse von Borie Frères in Paris; 6) Drainröhrenpresse von Mundscheid in Malapane; 7) einfache englische Röhrenpresse. 1853. n. 6 Thlr.

II. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Verbesserte Flachs-Brechmaschine von Kuthe; 2) Flachsschwinge-Maschine von J. Bücklers; 3) Patentirter Apparat und Verfahren der Flachs-Dampfröste von Watt in Irland; 4) E. Kaemmerer's Universal-Säe-Maschine. 1853. n. 6 Thlr.

III. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Transportabler Cylindergöpel von Barret, Exall u. Andrews in Reading; 2) transportables deutsches Rosswerk; 3) Häckselschneide-Maschine nach Gillet; Schrotmühle mit Stahlwalzen. 1854. n. 6 Thlr.

IV. Heft oder II. Serie 1. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Englische Dreschmaschine; 2 Salmon's Häckselschneide-Maschine; 3) Bedford-Eggen. 1855. n. 6 Thlr.

V. Heft, oder II. Serie 2. Heft, mit 6 Tafeln: Thonschlemmerei zu Joachimsthal; Göpel von Pinet; Romaine's Dampfgrabe-Maschine. 1856. n. 6 Thlr.

VI. u. VII. (Doppel)Heft, oder II. Serie 3. u. 4. Heft, a. u. d. T.: Die neueren Dampfcultur-Geräthe und Dampfpflüge Englands. Von Dr. C. F. Schneitler. Mit 11 Tafeln. 1857. n. 8 Thlr.

Heft 1—3 herausgegeben von C. F. Schneitler, Heft 4—7 oder II. Serie 1—4. Heft von C. F. Schneitler und J. Andrée.

Schneitler, Dr. **C. F.**, und **Julius Andree**, Civil-Ingenieurs, **die neueren und wichtigeren landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthe, ihre Theorie, Construction, Wirkungsweise und Anwendung. Ein Handbuch der landwirthschaftlichen Maschinen- und Geräthekunde zum Selbststudium und Unterricht. Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1862. geh. 3 Thlr.**

„Das neueste und vollständigste Buch über landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe, welches durch seine vozüglich klaren und anschaulichen Abbildungen wie durch seinen gediegenen beschreibenden Text die vollste Anerkennung bei allen gefunden hat, die als Landwirthe oder Techniker mit den landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthen sich näher bekannt zu machen Veranlassung haben. Wir können nur wiederholen, dass wir es hier mit einem gediegenen, der wärmsten Empfehlung werthen Werke zu thun haben. Alle Landwirthe, welche den Fortschritt in ihrem ehrenwerthen Berufe mit Freuden begrüssen, können „diese" Maschinen- und Geräthe-Kunde gar nicht entbehren, und legen wir besonders auch allen Mitgliedern unseres Vereins die Anschaffung desselben ans Herz."

[Landwirthschaftliche Mittheilungen (Neuhaldensleben) 1859, Nr. 4.]

Schrödter, J. G., **faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Nach Beispielen aus den in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. gr. 8. 1850. geh. 1 Thlr. 9 Ngr.**

Neben einer sehr klaren Darstellung der algebraischen Lehrsätze enthält das Buch ausführliche Auflösungen aller in Meyer Hirsch's Sammlung enthaltenen algebraischen Aufgaben, welche dasselbe vorzugsweise zum Selbstunterricht in der Algebra geeignet machen.

Stamm, Ernst, **theoretische und praktische Studien über den Selfactor oder die selbstthätige Mule-Feinspinnmaschine. Aus dem Französischen übersetzt von Ernst Hartig. Mit einem Vorwort von Dr. J. A. Hülsse, Director der polytechnischen Schule in Dresden. Mit 10 Kupfertafeln (in qu.-Fol. u. Imp.-Fol.) I. Heft: Text. II. Heft: Kupfertafeln. gr. 4. 1862. geh. n. 4 Thlr.**

Der Herr Verfasser vorliegender Schrift sprach gegen mich den Wunsch aus, dieselbe in Deutschland einzuführen; ich konnte diesem Wunsche um so bereitwilliger entsprechen, als die Schrift selbst für eine wesentliche Bereicherung der im Fache der Spinnereimechanik ohnehin nicht sehr zahlreichen Literatur zu erachten ist, und sich auf eine mechanische Vorrichtung erstreckt, welche mit jedem Tage grössere Bedeutung erhält und an deren Vervollkommnung und Nutzbarmachung für andere Spinnstoffe als Baumwolle auch deutsche Werkstätten sich wesentlich betheiligen, den Gegenstand selbst aber in einer Art behandelt, welche auch für den der höheren Mathematik nicht Kundigen ein Verständnis zulässt. Ich erlaube mir daher Alle, welche sich für das Spinnereifach interessieren, auf die in dieser Schrift enthaltenen neuen und eingehenden Betrachtungen über die Wirksamkeit der einzelnen Mechanismen des Selfactors und über die Mittel, durch welche einzelnen Fehlern in dem Producte des Selfactors abgeholfen werden kann, hinzuweisen.

Dr. J. A. Hülsse in Dresden.

Digitized by Google

Vorlaender, I. I., Königl. Preuss. Cataster-Inspector und Steuerrath, Ausgleichung des Fehlers polygonometrischer Messungen. gr. Lex.-8. 1858. geh. 15 Ngr.

„Der rühmlichst bekannte Verfasser zeigt in der vorliegenden Schrift in klarer gefälliger Sprache die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausgleichung der durch Seiten- und Winkelmessungen bestimmten Polygone. — Dieselbe kann nur als eine höchst willkommene Erscheinung betrachtet werden, und zwar insbesondere für alle diejenigen praktischen Geometer und Markscheider, denen die Erzielung einer grösstmöglichen Genauigkeit ihrer polygonometrischen Arbeiten ohne allzugrossen Zeitaufwand am Herzen liegt; es dürfte dieselbe ihres wissenschaftlichen Werthes halber auch noch als ein angenehmes Supplement zu den mehrfach erschienenen Schriften über Ausgleichungsrechnung (Gerling, Dienger &c.) angelegentlichst zu empfehlen sein. Im Uebrigen ist die Ausstattung des Werkes als vortrefflich anzuerkennen."

[Zeitschrift für Mathematik, 1858, 2. Heft.]

——— über die Berechnung der Flächen-Inhalte ganz oder überwiegend aus Originalmaassen. gr. Lex.-8. 1858. geh. n. 20 Ngr.

Dieses Schriftchen will Beiträge liefern zur Lösung der Aufgabe: die Arbeit der Flächenberechnung aus Originalmaassen auf ihren geringsten Umfang einzuschränken und, falls dieser noch über die verfügbaren Kräfte hinausgehen sollte, die Hilfsmittel anzugeben, welche bei einem Nachlassen von der ganzen Strenge des Grundsatzes eine erhebliche Arbeitsverminderung ohne unzulässige Verluste an der Genauigkeit der Resultate gestatten.

Weber, M. M. Freih. von, Ingenieur, Königl. Sächs. Eisenbahn-Director etc., die Technik des Eisenbahn-Betriebes in Bezug auf die Sicherheit desselben. gr. 8. 1854. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende, von der Kritik einstimmig als jedem Techniker und Eisenbahnbeamten *unentbehrlich* bezeichnete Werk behandelt den technischen Eisenbahnbetrieb in Bezug auf die Sicherheit desselben in folgenden Hauptabtheilungen, deren jede wiederum in eine grosse Anzahl von Unterabtheilungen zerfällt, so dass nichts unerörtert bleibt, was nur irgend für den behandelten Gegenstand in Frage kommen kann, nämlich:

I. Wege und Werke. a. Oberbau. b. Unterbau. c. Bahnbewachung. d. die Stationen. **II. Betriebsmittel.** a. Locomotiven. b. Personenwagen. c. Güterwagen. **III. Bewachung. IV. Signale. V. VI. Böswilligkeit, Unregelmässigkeit, atmosphärische Einflüsse &c. VII. Assecuranzen.** Schlusswort.

——— die rauchfreie Verbrennung der Steinkohle, mit specieller Rücksicht auf C. J. Duméry's Erfindung. Mit 3 lith. Tafeln. gr. 8. 1859. geh. 18 Ngr.

Durch die Erfindung Duméry's ist ein lange angestrebtes Ziel, wenn auch vielleicht nicht vollständig erreicht, doch näher gerückt, als durch alle früheren Bemühungen. Die vorliegende Schrift beleuchtet die Duméry'schen Vorkehrungen zur rauchfreien Verbrennung der Steinkohlen und macht dieselben durch detaillierte Zeichnungen anschaulich.

——— die Lebensversicherung der Eisenbahn-Passagiere in Verbindung mit der Unterstützung und Pensionirung der Eisenbahn-Beamten und ihrer Angehörigen. gr. 8. 1855. geh. 12 Ngr.

Der Verfasser weist nach, mit welchen Mitteln die Eisenbahn-Verwaltungen ohne fühlbaren Druck auf das Publikum sich von der Sorge um die Beschaffung der Geldmittel für die Pensionierung und Unterstützung der Beamten, diese selbst aber von der schweren Last der Beisteuer zu den Unterstützungscassen befreien können.

——— die Gefährdungen des Personals beim Maschinen- und Fahrdienst der Eisenbahnen. Eine Denkschrift. gr. 8. 1862. geh. 12 Ngr.

Dieses Schriftchen ist speciell dem Wohle der Eisenbahn-Beamten und Arbeiter gewidmet. Die auf langjährige Erfahrung gestützten Vorschläge des rühmlichst bekannten Verfassers haben bereits vielseitige Berücksichtigung gefunden.

Wiener, Dr. Christian, Professor an der Polytechnischen Schule zu Carlsruhe, über Vielecke und Vielflache. [VIII u. 31 S. mit 3 lithographierten Tafeln.] gr. 4. geh. 24 Ngr.

Witzschel, Dr. Benjamin, Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der metrischen Verhältnisse an

Digitized by Google

Systemen von Punkten in einer Graden und einer Ebene. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1857. geh. n. 2 Thlr.

Vorliegende Grundlinien der neueren Geometrie sind für den ersten Unterricht in diesem Zweige der Mathematik bestimmt und die ganz elementare Entwickelung des Gegenstandes dürfte in besonderen Fällen die Lehrer der Geometrie veranlassen, einige Partien oder Sätze der neueren Geometrie in den zeither üblichen Unterrichtscursus mit aufzunehmen. — Dass das Buch als eine vorzügliche Bereicherung der mathematischen Literatur angesehen werden muss, hat Herr Prof. Bretschneider in Gotha in einer ausführlichen Beurtheilung in der „Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik" Heft III, S. 258 ff. nachgewiesen.

Wüllner, Dr. Adolph, Director der Provinzialgewerbeschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik mit theilweiser Benutzung von Jamin's cours de physique de l'école polytechnique. Zwei Bände in vier Abtheilungen. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten und zwei Tafeln in lithographischem Farbendruck. gr. 8. 1862—1865. geh. n. 11 Thlr. 20 Ngr.

Einzeln:

I. Bandes 1. Abth. **Mechanik und Akustik.** n. 2 Thlr. 16 Ngr.
I. » 2. Abth. **Optik.** n. 2 Thlr. 12 Ngr.
II. » 1. Abth. **Wärmelehre.** n. 2 Thlr. 12 Ngr.
II. » 2. Abth. **Die Lehre vom Magnetismus und der Electricität.** n. 4 Thlr. 10 Ngr.

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses neuen, elegant ausgestatteten Lehrbuchs der Physik sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen, es hat aber, ohne den ersten Zweck ausser Acht zu lassen, die zweite wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefasst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die Verlagshandlung freut sich, ein Urtheil des Herrn Professor Jolly in München beifügen zu können, welcher sich folgendermassen über das Buch ausspricht:

„Das Lehrbuch der Physik von Wüllner ist eine sehr gelungene Arbeit, die sich, obschon es unserer Litteratur nicht an guten Lehrbüchern fehlt, dennoch rasch Bahn brechen wird. Im einleitenden Theil der Mechanik schliesst sich Wüllner noch vielfach an das Lehrbuch von Jamin an, sehr bald geht aber der Verfasser zu einer ganz selbstständigen Arbeit über, in welcher das Lehrbuch von Jamin nur soweit benutzt ist, als in demselben die Arbeiten französischer Physiker in grösserer Ausführlichkeit vorgetragen sind. Wüllner's Lehrbuch hat zunächst vor dem französischen Werke schon den Vorzug, dass in grosser Vollständigkeit auch die Arbeiten nicht französischer Forscher Berücksichtigung gefunden haben. Es hat aber zugleich in der Litteratur der Lehrbücher einen entscheidenden Vorzug dadurch, dass jedem Abschnitte und jedem Kapitel in kritischer Auswahl und Beleuchtung die Originalarbeiten, auf welche die Untersuchung sich stützt, speciell angegeben sind. Der in die Wissenschaft neu Eintretende wird hierdurch mit der laufenden Litteratur bekannt, er findet zugleich die Quellen angegeben, zu denen er zurückzugehen hat, wenn er im fortschreitenden Studium der Forschung sich widmen will. Beschränkt sich der Verfasser zunächst auf den Gebrauch der Elementarmathematik, so sind doch zugleich überall die Wege bezeichnet, die zum Verständnis der analytischen Behandlung führen, und die den Anfänger befähigen, sobald er die Sprache der höheren Mathematik sich angeeignet hat, mit Leichtigkeit den betreffenden monographischen Arbeiten zu folgen. Wäre der Ausdruck „eine literarische Erscheinung befriedige ein längst gefühltes Bedürfniss" nicht allzusehr verbraucht, so würde ich ihn über das Werk von Wüllner mit vollster Ueberzeugung gebrauchen."

Jolly.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. Schlömilch, Dr. B. Witzschel, Dr. M. Cantor und Dr. E. Kahl. I—X. Jahrgang 1856—1865, 6 Hefte jährlich. gr. 8. geh. à Jahrgang n. 5 Thlr.

I.—III. Jahrgang, herausgegeben von O. Schlömilch und B. Witzschel.
IV. » » » denselben und M. Cantor.
V.—X. » » » O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor.

Unter der Presse:

Neumann, Carl, das Dirichlet'sche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. gr. 8. geh.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte. Deutsch von Dr. W. Fiedler. 2. Aufl.

Zetzsche, E., Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google